CNC-Maroc 2001—Epreuve de math I : Corrigé
Par M.Taibi professeur en MP* à Rabat

Partie I

1- Soit $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin(\theta) - n\theta)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$, donc J_n est bien définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

2- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Effectuer le chgt de variable affine $u = \pi - \theta$ dans l'intégrale définissant J_{-n} , pour obtenir :
$J_{-n}(x) = \dfrac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\pi - u) - n(\pi - u))d\theta = (-1)^n J_n(x)$.

3- Soit $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin(\theta) - n\theta)$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, J_n est de classe C^∞ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$J_n^{(p)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^p}{\partial x^p}(\cos(x \sin(\theta) - n\theta))d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^p(\theta) \cos(x \sin(\theta) - n\theta + p\frac{\pi}{2})d\theta$

4- En posant

$$\begin{aligned} g_x(\theta) &= -x^2 \sin^2(\theta) \cos(x \sin(\theta) - n\theta) - x \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &\qquad\qquad + (x^2 - n^2) \cos(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &= x \sin(\theta) \sin(n\theta - x \sin(\theta)) + x^2 \cos^2(\theta) - n^2) \cos(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &= \tfrac{d}{d\theta} \left((x \cos(\theta) + n) \sin(x \sin(\theta) - n\theta)\right) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} x^2 J_n(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^\pi g_x(\theta)d\theta \\ &= [(x \cos(\theta) + n) \sin(x \sin(\theta) - n\theta)]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

5- Cours : Equation différentielle lineaire, sans second membre, du 2^{sd} ordre, résolue en y'' sur $I = \mathbb{R}_+^*$, donc l'espace des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est de dimension 2.

Partie II

1- Lemme de Granwall :
Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $w(x) = \left(\int_y^x u(t)v(t)dt\right) \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)$ pour $x > 0$

(a) Si F désigne une primitive de l'application continue sur $\mathbb{R}_+^*$: $f : x \mapsto u(x)v(x)$, et V celle de l'application v, alors $w(x) = (F(x) - F(y)) \exp(V(x) - V(y))$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée d'applications dérivables (elle est même C^1).

On a

$$\begin{aligned} w'(x) &= \tfrac{d}{dx} w(x) \\ &= u(x)\underbrace{v(x) \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)}_{= \frac{d}{dx}\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)} + \left(\int_y^x u(t)v(t)dt\right) \tfrac{d}{dx} \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \\ &= \left(u(x) + \int_y^x u(t)v(t)dt\right) \tfrac{d}{dx} \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \\ &= \left(\underbrace{u(x) - \int_x^{+\infty} u(t)v(t)dt}_{\leqslant A} + \int_y^{+\infty} u(t)v(t)dt\right) \tfrac{d}{dx} \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \\ &\leqslant \alpha(y) \tfrac{d}{dx} \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \quad \text{car} \quad u(x) - \int_x^{+\infty} u(t)v(t)dt \leqslant A \end{aligned}$$

D'où

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^* , \quad w'(s) \leqslant \alpha(y) \frac{d}{ds} \exp\left(\int_y^s v(t)dt\right)$$

(b) Soit $x \in]0, y]$, par intégration de l'inégalité précédente sur $[x, y]$, on obtient :
$w(y) - w(x) \leqslant \alpha(y) \left[1 - \exp(\int_y^x v(t)dt)\right] = \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \left[\alpha(y) \exp\left(\int_x^y v(t)dt\right) - \alpha(y)\right]$
Or $w(y) = 0$, donc $-w(x) \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \leqslant \alpha(y) \exp\left(\int_x^y v(t)dt\right) - \alpha(y)$, soit encore $\alpha(y) -$

$w(x)\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) \leqslant \alpha(y)\exp\left(\int_x^y v(t)dt\right)$

En utilisant l'expression de $w(x)$, on a :

$$\begin{aligned}\alpha(y) - w(x)\exp\left(\int_y^x v(t)dt\right) &= \alpha(y) + \int_x^y u(t)v(t)dt \\ &= \underbrace{\alpha(y) - \int_y^{+\infty} uv}_{=A} + \int_x^{+\infty} uv = \alpha(x)\end{aligned}$$

et par suite :

$$u(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant \alpha(y)\exp\left(\int_x^y v(t)dt\right) \quad \text{avec} \quad 0 < x \leqslant y.$$

Faisons tendre y vers $+\infty$, dans l'inégalité précédente,en tenant compte de $\lim\limits_{y\to+\infty} \alpha(y) = A$, il vient :

$$\forall x > 0, \quad u(x) \leqslant A\exp\left(\int_x^{+\infty} v(t)dt\right)$$

2- Autour de l'equation différentielle F_q : $\quad y'' + (1+p)y = 0$

(a) Résolution de F_0 : équation différentielle linéaire à cœfficients constants, son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$. Donc les solutions réelles sont de la forme $y = A\cos(x) + B\sin(x)$ où A, B sont des constantes réelles.

(b) La méthode de variations des constantes permet de conclure : posons $y(x) = \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x)$ où λ, μ sont au moins de calsse C^1.

y est solution de l'equation proposée ssi $\begin{cases} \lambda'\cos(x) + \mu'\sin(x) = 0 \\ -\lambda'\sin(x) + \mu'\cos(x) = -pf \end{cases}$ ssi

$\begin{cases} \lambda' = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ pf & \cos(x) \end{vmatrix} = -pf\sin(x) \\ \mu' = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & pf \end{vmatrix} = pf\cos(x) \end{cases}$ Avec $\lambda(x) = -\int_b^x p(t)f(t)\sin(t)dt$ et $\mu(x) = \int_b^x p(t)f(t)\cos(t)dt$.

Les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) + \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x) \\ &= A\cos(x) + B\sin(x) + \int_b^x f(t)\underbrace{\left(-p(t)\sin(t)\cos(x) + p(t)\cos(t)\sin(x)\right)}_{\substack{\shortparallel \\ k_p(x,t)}}dt \end{aligned}$$

(c) z est solution de F_p ssi z vérifie $z'' + z = -pz$. Comme en **b**) on obient $z(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \int_b^x z(t)k_p(x,t)dt$ avec ....

3- Soit $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Soit $q \in C^2(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R})$ tel que $I_n = \dfrac{J_n}{q}$ est solution d'une équation différentielle de type (F_{p_n}), on alors :

$J_n' = q'I_n + qI_n'$, $\quad J_n'' = q''I_n + 2q'I_n' + qI_n''$ et puis :

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - n^2)J_n + xJ_n' + x^2J_n'' \\ &= \left((x^2-n^2)q + xq' + x^2q''\right)I_n + \left(xq + 2x^2q'\right)I_n' + x^2qI_n'' \qquad (**) \end{aligned}$$

L'équation différentielle $(**)$ est type F_{p_n} ssi $\begin{cases} xq + 2x^2q' = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ et $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est une solution qui convient et dans ce cas $p_n(x) = -\frac{n^2}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x^3}$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) .On rappelle $\quad \begin{aligned} k_{p_n}(x,t) &= -p_n(t)\sin(t)\cos(x) + p_n(t)\cos(t)\sin(x) \\ &= -p_n(t)(\sin(x-t). \end{aligned}$

$\left|I_n = \frac{J_n}{q}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ car $|J_n| \leqslant 1$, donc

$|I_n(t)k_{p_n}(x,t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}|p_n(t)| = O(\frac{1}{t^{\frac{5}{2}}})$ et comme l'application $t \mapsto I_n(t)k_{p_n}(x,t)$ est continue sur $[1, +\infty[$, son intégrabilité sur $[1,+\infty[$ en résulte.

L'expression de $k_{p_n}(x,t)$ montre que $x \mapsto \int_1^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt$ est une combinaison linéaire des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

(c) I_n vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$: $I_n'' + I_n = -p_n I_n$, donc d'après 2.c) I_n est de la forme : $I_n(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \int_1^x I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt$ ici $b=1$

Or $\int\limits_1^x I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt = \int\limits_1^{+\infty} - \int\limits_x^{+\infty} = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) - \int_x^{+\infty}$ avec α et β des constantes réelles (voir question 3.b)).Donc $I_n(x) = C\cos(x) + D\sin(x) - \int\limits_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt$ avec C, D des réelles qui ne dépendent -a priori- que de n

(d) $$\begin{aligned} |I_n(x)| &\leqslant |C| + |D| + \left|\int\limits_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)\right| dt \quad \text{qui résulte de } \left\{\begin{array}{l}\text{Inégalité triangulaire} \\ \text{intérale et valeur absolue} \\ \text{expression de } K_{p_n}(x,t)\end{array}\right. . \\ &\leqslant |C| + |D| + \int\limits_x^{+\infty} |I_n(t)|\,|p_n(t)|\,dt \end{aligned}$$

Par le lemme de Granwall ($voir$ question 1.b)

$|I_n(x)| \leqslant M\exp(\int\limits_x^{+\infty} |p_n(t)|\,dt \leqslant M\exp(\int\limits_1^{+\infty} |p_n(t)|\,dt)$ où $M = |C| + |D|$ et de plus $C = D = 0$, on a $M = 0$ et puis $I_n \equiv 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, impossible car J_n est non nulle.

Remarque : on peut démontrer que I_n est bornée sans utiliser le lemme de Granwall.

(e) Par transformation trigonométrique ,on a :

$$\begin{aligned} J_n(x) = qI_n &= \tfrac{1}{q(x)}\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) - \tfrac{1}{q(x)}\int\limits_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{x}}\left(A_n\cos(x+\beta_n)\right) - \tfrac{1}{\sqrt{x}}\int\limits_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt. \end{aligned}$$

$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int\limits_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x,t)dt\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int\limits_x^{+\infty} |I_n(t)|\,|k_{p_n}(x,t)|\,dt \leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} |p_n(t)|\,dt$. où α est un majorant de $|I_n|$.

L'expression de p_n montre que $\int\limits_x^{+\infty} |p_n(t)|\,dt \leqslant \frac{cte}{x\sqrt{x}} + \frac{cte}{x^{3/2}\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} O(\frac{1}{x^{3/2}})$

D'où $J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(A_n\cos(x+\beta_n)\right) + O(\dfrac{1}{x^{3/2}})$ au voisinage de $+\infty$.

Partie III

Ici $n \in \mathbb{N}$.

1- Quelques propriétés de J_n.

(a) Pour $(m,k) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a :

$$\begin{aligned} J_{m-1}^{(k-1)}(0) - J_{m+1}^{(k-1)}(0) &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^{(k-1)}(\theta)\cos((m-1)\theta + (k-1)\tfrac{\pi}{2})d\theta \\ &\quad -\tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^{(k-1)}(\theta)\cos((m+1)\theta + (k-1)\tfrac{\pi}{2})d\theta \\ &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^k(\theta)\left(2\sin(\theta m)\sin(\tfrac{1}{2}\pi k) - 2\cos(\theta m)\cos(\tfrac{1}{2}\pi k)\right)d\theta \\ &= 2\tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin^k(\theta)\left(\cos(\theta m + \tfrac{1}{2}\pi k)\right)d\theta \\ &= J_m^{(k)}(0) \end{aligned}$$

(b) Soit $n > 0$ et $k \in \{0, ..., n-1\}$, on a :

$J_n^{(0)}(0) = J_n(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\sin(n\theta)\right]_0^{\pi} = 0$

supposons que $J_n^k(0) = 0$ pour tout $k \in [0, n-2]$, on a alors :

$2J_n^{(k+1)}(0) = J_{n-1}^{(k-1)}(0) - J_{n+1}^{(k-1)}(0) = 0$

(c) Calcul de $J_n^{(n)}(0)$:

$2J_n^{(n)}(0) = J_{n-1}^{(n-1)}(0) - J_{n+1}^{(n-1)}(0) = J_{n-1}^{(n-1)}(0)$. d'où $J_n^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} J_1^{(1)}(0)$.

Or $J_1^{'}(0) = \frac{1}{2}(J_0(0) - J_2(0))$ (relation de 3.1.a), donc $J_1'(0) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$. D'où finalement $J_n^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(d) La formule de taylo-young à l'ordre n autour de 0,donne :
$J_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} J_n^{(k)}(0)x^k + o(x^n) = \dfrac{x^n}{2^n n!} + o(x^n)$ car $J_n^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.
Ceci montre bien que $J_n(x)$ est de signe de $\frac{x^n}{2^n n!}$ sur un voisinage pointé en 0, d'où l'existence de $\alpha > 0$ telle que J_n est strictement positive sur $]0, \alpha]$.

2- C'est du cours : (voir aussi 3-)

3- J_n solution non nulle sur $]0, \alpha]$ de (E_n) $\Leftrightarrow$ $\phi_f = \dfrac{f}{J_n}$ est solution de l'équation différentielle : $z'' = \left(2\dfrac{J_n'(x)}{J_n(x)} + \frac{1}{x}\right) z'$ $\Leftrightarrow$ $\frac{d}{dx}\phi_f$ est solution de (ε_n) : $z' = \left(-\dfrac{2n+1}{x} + \psi_n(x)\right) z = 0$, avec $\psi_n(x) = \dfrac{2n}{x} - 2\frac{J_n'(x)}{J_n(x)}$.

(a) La solution générale de l'équation différentielle (ε_n) est de la forme : $z(x) = \lambda \exp(\int\limits_{\alpha}^{x} \left(-\dfrac{2n+1}{t} + \psi_n(t)\right) dt)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $z(x) = \lambda_n \frac{1}{x^{2n+1}} \exp(\int_\alpha^x \psi_n(t)dt)$ où $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $\lambda_n = -\frac{1}{2^n n!}\frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}$, alors $y_n(x) = J_n(x)\phi_{y_n}(x)$ est une solution de (E_n) telle $\frac{d\phi_{y_n}}{dx} = -\frac{1}{x^{2n+1}}\frac{1}{2^n n!}\frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}\exp(\int\limits_{\alpha}^{x}\psi_n(t)dt) = -\dfrac{1}{x^{2n+1}}(1+\zeta_n(x))$, avec $\zeta_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}\exp(\int\limits_{\alpha}^{x}\psi_n(t)dt) - 1$.
Vu l'expression de ψ_n l'application ζ est définie et continue sur $]0, \alpha]$. De plus par $J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} + x^n o(1)$ au voisinage de 0 et $\exp(\int\limits_{\alpha}^{x}\psi_n(t)dt) = \left(\dfrac{x^n}{J_n(x)}\right)^2 . \left(\dfrac{\alpha^n}{J_n(\alpha)}\right)^2$, on a bien $\lim\limits_{x\to 0+} \zeta(x) = 0$.
Pour $n = 0$, avec $\lambda_0 = -\frac{1}{J_0(\alpha)}$,le calcul direct donne le résultat.

(c) Pour $n = 0$, on a $\dfrac{d\phi_{y_0}}{dx} = -\frac{1}{x^1}J_0(\alpha)\exp(\int\limits_{\alpha}^{x}\psi_0(t)dt) = -\dfrac{1}{x}$, donc $\phi_{y_0}(x) = -\ln(x) + c$ où c est un réel et puis $y_0(x) = J_0(x)\left(\ln(\frac{1}{x}) + c\right) \underset{x\to 0+}{\to} +\infty$ car $J_0(0) = 1$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{d\phi_{y_n}}{dx} = -\dfrac{1}{x^{2n+1}}(1 + \zeta_n(x))$, avec $\lim\limits_{x\to 0+}\zeta_n(x) = 0$, on reconnait le développement asymptotique de $\frac{d\phi_{y_n}}{dx}$ qui s'intègre car ζ est prologeable par continuité sur $[0, \alpha]$. D'où $\phi_{y_n}(x) = \dfrac{1}{2nx^{2n}} + \dfrac{1}{x^{2n}}o(1)$.... et puis $y_n(x) = J_n(x)\frac{1}{2nx^{2n}} + J_n(x)\frac{1}{x^{2n}}o(1)$. Mais $\dfrac{J_n(x)}{x^n} = \dfrac{1}{2^n n!}$, donc $y_n(x) \underset{x\to 0+}{\to} +\infty$.

5- Sur $\mathbb{R}_+^*$, le thm de Cauchy-lipschitz s'applique, soit alors N_n une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_n) telle que $N_n(\frac{\alpha}{2}) = y_n(\frac{\alpha}{2})$ et $N'(\frac{\alpha}{2}) = y_n'(\frac{\alpha}{2})$.
N_n et y_n coincident sur $]0, \alpha]$, donc $\lim\limits_{x\to 0+} N_n(x) = \lim\limits_{x\to 0+} y_n(x) = +\infty$.

6- Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des solutions $S_H(E_n)$ de l'équation différentielle (E_n) est un espace vectoriel de dimension deux, engendré par $(J_n\ , N_n)$. Donc toute solution y de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme : $y(x) = AJ_n(x) + BN_n(x)$ où A, B sont des constantes réelles.
Comme J_n est bornée, alors y est bornée ssi $B = 0$. (en prenant $y = 0$,ceci permet aussi de monter que la famille (J_n, N_n) est libre). D'où V ensemble des solutions bornées de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-espace vectoriel de $S_H(E_n)$ de dimension 1 engendré par J_n.

Partie IV

Remarquons d'abord que :
· la fonction f est continue, de classe C^1 par morceaux et paire
·· la fonction g est continue, impaire et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1- Our tout $n \in N$, $a_n(g) = 0$ car g est une fonction impaire
de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ car f est paire
Par les relations liants les coefficients de Fourier trigonométriques et les coef. exponentiels et parités des fonctions f est g, on a :

$\begin{cases} a_n(f) = 2c_n(f) \\ b_n(g) = 2ic_n(g) \end{cases}$ D'autre part on a : $c_n(g') = -inc_n(g)$, d'où $a_n(g') = -nb_n(g)$.

Mais $g' = f - 1$, donc $a_n(g') = a_n(f) - \underbrace{\int_0^1 \cos(2n\pi t)dt}_{=0}$ car $w = \frac{2\pi}{T} = \pi$ et puis $a_n(g') = a_n(f)$. par ce qui précède $a_n(f) = a_n(g') = -nb_n(g)$.

2- Pour $x = 0$, $\int_0^\pi \cos(\theta)d\theta = [\sin(\theta)]_0^\pi = 0$

Pour $x \neq 0$, $\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(x\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta &= \frac{1}{x}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))d(x\sin(\theta)) \\ &= \frac{1}{x}[\sin(x\sin(x))]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$

(a) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $J_1(x) = \frac{2x}{\pi}\int_0^1 \cos(xt)\sqrt{1-t^2}dt$

Avec la transformation $\cos(x\sin(\theta)-\theta) = \cos(x\sin(\theta))\cos(\theta) + \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)$ on a :

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta)-\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos(x\sin(\theta))\cos(\theta) + \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)\right)d\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\cos(\theta)d\theta}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^\pi \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)d\theta \end{aligned}$$

Faisons le cht de variable $t = \pi - \theta$, dans la seconde intégrale, il vient :

$J_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x\sin(t))\sin(t)dt$

Puis par le chgt de variable $u = \cos(t)$, on obtient : $J_1(x) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin(xu)}{\sqrt{1-u^2}}du$

Et enfin par une intégartion par parties $\begin{cases} U = x\sin(xu) \\ V = \sqrt{1-u^2} \end{cases}$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}x\ J_1(x) &= \int_0^1 UdV = [UV]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 VdU \\ &= -\left[x\sin(xu)\sqrt{1-u^2}\right]_{u=0}^{u=1} + \int_0^1 \cos(xu)\sqrt{1-u^2}du \\ &= \int_0^1 \cos(xu)\sqrt{1-u^2}du \end{aligned}$$

Finalement

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi}\int_0^1 \cos(xu)\sqrt{1-u^2}du$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n(f) = 2\int_0^1 f(t)\cos(2n\pi t)dt = 2\int_0^1 \cos(2n\pi t)\sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{2n\pi}J_1(2n\pi)$

D'où

$$a_n(f) = \frac{1}{2n}J_1(2n\pi).$$

4- Convergence uniforme de la série de Fourier de f

(a) D'après II-3-c) , pour n assez grand : $J_1(2n\pi) = \frac{A_1}{\sqrt{2n\pi}}\sin(2n\pi + \beta_1) + O(\frac{1}{n^{3/2}}) = \frac{K}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$ avec $K = \frac{A_1\sin(B_1)}{\sqrt{2\pi}}$. D'où $a_n(f) = \frac{1}{2n\pi}J_1(2n\pi) = \frac{Cte}{n^{3/2}} + O(\frac{1}{n^{3/2}}) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$

(b) Par $a_n(f) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$, le terme général de la série de Fourier de f vérifie $|a_n(f)\cos(n\pi t)| \leqslant |a_n(f)| \leqslant \dfrac{c^{te}}{n^{3/2}}$, il y'a convergence normale (donc uniforme) de la série de fourier de f sur $\mathbb{R}$.

(a) Voir la remarque ci-dessus...

(b) Résultats du cours (thm de Direchlet de convegence normale des séries de fourier)

6- Sous les hypothèses
f est continue sur $\mathbb{R}$
f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$
f est à points de discontinuités réguliers
la conclusion en résulte.

Partie V

1- Comme J_0 est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et $t \mapsto e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $p > 0$, alors l'application continue $t \mapsto J_0(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $p > 0$.

2- Les inégalités de 5.2) sont immédiates car les fonctions facteur de e^{-pt} sont majorées en valeur absolue par 1

3- Pour $p > 0$ fixé, et $a > 0$, on a :
$\left|\int\limits_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt}dt - \int\limits_0^a J_0(t)e^{-pt}dt\right| = \left|\int\limits_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt}dt\right| \leqslant \frac{e^{-ap}}{p} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

D'où $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_0^a J_0(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt}dt$. Mais

$\int\limits_0^a J_0(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \left(\int\limits_0^\pi e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)d\theta\right)dt \overset{Fubini}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^a e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta$

Or $\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\int\limits_0^a e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta\right|$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^\pi \left(\int\limits_a^{+\infty} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|\int\limits_a^{+\infty} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right|d\theta$$
$$\leqslant \frac{e^{-ap}}{p} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De ces résultas on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(x\sin(\theta)dt\right)d\theta$$

4- Ecrivons $e^{-pt}\cos(t\sin(\theta)) = \Re(e^{-pt}e^{i(t\sin(\theta))}) = \Re(e^{t(-p+i\sin(\theta))})$, alors
$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(t\sin(\theta))dt = \Re(\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x e^{t(-p+i\sin(\theta))}dt)$

Comme $\int\limits_0^x e^{t(-p+i\sin(\theta))}dt = \left[\frac{1}{-p+i\sin(\theta)}e^{t(-p+i\sin(\theta))}\right]_{t=0}^{t=x}$
$$= \left(\frac{-p}{p^2+\sin^2\theta} - i\frac{\sin\theta}{p^2+\sin^2\theta}\right)\left(e^{x(-p+i\sin(\theta))} - 1\right)$$
et que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(-p+i\sin(\theta))} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left|e^{x(-p+i\sin(\theta))}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-xp} = 0$ car $p > 0$, on a alors :
$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(t\sin(\theta))dt = \Re\left(\frac{p}{p^2+\sin^2\theta} + i\frac{\sin\theta}{p^2+\sin^2\theta}\right) = \dfrac{p}{p^2+\sin^2\theta}$.

Par $\int\limits_{\pi/2}^\pi \dfrac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta \overset{chgt\ de\ var\ \theta\leftrightarrow\pi/2-\theta}{=} \int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta$ on a :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^\pi \frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta \quad . \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta$ on fait le cht de variable $u = \tan(\theta)$, alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2+\sin^2\theta}d\theta &= \int_0^{+\infty} \frac{p}{(p^2+\frac{u^2}{1+u^2})(1+u^2)}du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{p}{(p^2+(1+p^2)u^2)}du \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(\frac{x\sqrt{p^2+1}}{p})}{\sqrt{p^2+1}} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}
\end{aligned}
$$

Finalement $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ pour tout $p > 0$