

**Première partie**

1) a) Au voisinage de 0 : On sait que  $e^t = 1 + t + o(t)$ , donc  $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = b - a + o(1) \sim b - a$  intégrable au voisinage de 0.

Au voisinage de  $+\infty$  : On sait que  $e^{-at} = o\left(\frac{1}{t}\right)$ , donc  $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

b)  $I(a, b) = -I(b, a)$ , très évident.

Posons :  $u = ta$ , donc :

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u} du = I\left(1, \frac{b}{a}\right).$$

c) i. L'application :  $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$  est continue sur  $[1, +\infty[ \times \mathbb{R}^*$  en tant que somme, rapport de fonctions continue, qui ne s'annule pas. En  $(x, 0)$  on a :  $f(x, t) \sim x - 1$  continue, donc  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

D'autre part : pour  $x \in [a, b] \subset [1, +\infty[$  on a :

$$\left| \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \right| = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \leq \frac{e^{-t} - e^{-bt}}{t} \text{ qui est continue, } \\ \text{intégrable sur } ]0, +\infty[, \text{ donc } \varphi \text{ est continue sur } [1, +\infty[.$$

ii. Pour  $x \in [a, b] \subset [1, +\infty[$  on a :  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$  continue, intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Donc  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$ , avec

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

iii. D'après le raisonnement fait dans la question précédente, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}, \text{ donc } \varphi(x) = \ln x + K, \text{ or } \varphi(1) = 0, \text{ d'où } K = 0 \text{ et } \\ \text{donc } \varphi(x) = \ln x.$$

d) Si  $b \geq a$ , alors  $x = \frac{b}{a} \geq 1$ , donc  $I(a, b) = I(1, \frac{b}{a}) = \varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .  
Si  $b \leq a$ , alors  $x = \frac{a}{b} \geq 1$ , donc :  
 $I(a, b) = -I(b, a) = -I(1, \frac{a}{b}) = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .  
Conclusion :  $I(a, b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .

2) a) Au voisinage de 0 : on sait que  $\ln(1+t) = t + o(t)$ , d'où  $\frac{\ln(1+t)}{t} \sim 1$  intégrable au voisinage de 0, donc  $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

b) Posons  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ , donc le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$  est égal à 1, dont la somme est  $\frac{\ln(1+x)}{x}$ , puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c) Pour  $x \in [0, 1]$  fixé, on vérifie facilement que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$  est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en particulier la majoration du reste par son 1<sup>er</sup> terme, donc  $\left| \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right| \leq \frac{1}{n+1}$ , donc le reste converge uniformément vers 0, et par suite la convergence de la série sur  $[0, 1]$  est uniforme.

$$\begin{aligned}
d) \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt \quad \text{D'après 2.2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt \\
&\text{Car la convergence est uniforme sur } [0,1] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} \\
&\text{On divise la somme en deux } n = 2p, n = 2p+1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} \\
&\text{Car } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&\text{Car } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

### Deuxième partie

- 1) a)  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , en tant que primitive de  $f$  qui est continue.  
On a  $\psi(f)(x) = \frac{g(x)}{x}$  pour  $x > 0$ , donc  $\psi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
Pour  $x \neq 0$ , le théorème des accroissements finis, donc  $g(x) - g(0) =$

$xg'(c)$  avec  $c$  compris entre 0 et  $x$ , d'où  $\psi(f)(x) = f(c) \rightarrow f(0) = \psi(f)(0)$  car  $g(0) = 0$  et  $g' = f$  continue, donc  $\psi(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , autrement dit  $\psi(f) \in E$ .

- b)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda \implies \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$  tel que  $|f(t) - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \geq A$ , donc pour  $x \geq A$  on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \lambda| &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t) dt - \lambda x \right| \\
&= \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t) dt - \int_0^x \lambda dt \right| \\
&= \frac{1}{x} \left| \int_0^x (f(t) - \lambda) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \lambda| dt \\
&= \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \lambda| dt + \frac{1}{x} \int_x^A |f(t) - \lambda| dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{1}{x} \int_x^A |f(t) - \lambda| dt \\
&\leq \frac{K}{x} + \frac{1}{x} \int_x^A \frac{\varepsilon}{2} dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{K}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \frac{x-A}{x} \leq 1 \\
&\leq \varepsilon \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x} = 0
\end{aligned}$$

La réciproque est fautive, prenons pour contre-exemple la fonction  $f(t) = \cos t$ , on a :  $\psi(f)(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  n'existe pas.

- c)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty \implies \forall B > 0, \exists A > 0$  tel que  $f(t) \geq \frac{B}{2} \quad \forall t \geq A$ , donc

$$\begin{aligned}\varphi(f)(x) &= \frac{1}{x} \left( \int_0^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt \right) \\ &\geq \frac{1}{x} \left( K + \frac{B}{2}(x-A) \right) \\ &= \frac{K}{x} + \frac{x-AB}{2x} \\ &\geq B \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x} + \frac{x-AB}{2x} = \frac{B}{2}\end{aligned}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(f)(x) = +\infty$ .

- d) i. Dans  $\psi(h)$  on va utiliser une intégration par partie, en posant  $u = x, v' = f$ , donc  $u' = 1, v = g$ , d'où :

$$\begin{aligned}\psi(h)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{x} \left( [tg(t)]_0^x - \int_0^x g(t) dt \right) \\ &= g(x) - \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = g(x) - \psi(g)(x)\end{aligned}$$

- ii.  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , donc  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$  admet une limite finie en  $+\infty$ , d'après la question 1.2)  $\psi(h)$  admet aussi la même limite en  $+\infty$ , or  $\psi(h) = g - \psi(g)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(h)(x) = 0$ .

La réciproque n'est pas toujours vraie, prenons pour contre-exemple  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ , non intégrable au voisinage de 0, car  $\frac{e^{-x}}{x} \sim \frac{1}{x}$ , alors que  $\psi(h)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t} dt = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \rightarrow 0$ , quand  $x \rightarrow +\infty$ .

- e)  $\sqrt{f} \geq 0$  et  $x \geq 0$ , donc  $\psi(\sqrt{f})(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{f(t)} dt \geq 0$ .

D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et

$$\begin{aligned}\sqrt{f}, \text{ on aura : } \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{f(t)} dt &\leq \frac{1}{x} \sqrt{\int_0^x dt} \sqrt{\int_0^x f(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt} = \sqrt{\psi(f)}\end{aligned}$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz

pour 1 et  $\sqrt{f}$ , donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire  $f$  est constante.

- 2) a) Il est clair que  $\psi(f + \lambda g) = \psi(f) + \lambda \psi(g)$ , n'oubliez pas de le mentionner pour  $x = 0$ , donc  $\psi$  est linéaire.

D'autre part d'après 1.1)  $\psi(f) \in E, \forall f \in E$ , donc  $\psi$  est un endomorphisme de  $E$ .

- b)  $f \in \text{Ker}(\psi) \implies \psi(f)(x) = 0, \forall x > 0$   
 $\implies g(x) = \int_0^x f(t)dt = 0, \forall x > 0$   
 $\implies g'(x) = f(x) = 0, \forall x \geq 0$

Donc  $\psi$  est injective.

- c) D'après 1.1) on peut affirmer que  $\psi(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , donc toute fonction de  $E$  qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme  $\psi(f)$ , c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc  $\psi$  n'est pas surjective.  $F(x) = |x-1|$  est un exemple de fonction de  $E$  qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , car non dérivable en 1.

- 3) a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients non constant, dont la solution est :

$$f(x) = K e^{-\int_0^x \frac{\lambda-1}{\lambda} t dt} = K e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln x} = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

- b)  $f$  est prolongeable en  $0^+$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  est finie  
si et seulement si  $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$  si et seulement si  $0 < \lambda \leq 1$ .

- 4) a) 0 ne peut pas être une valeur propre de  $\psi$  car elle est injective.

- b) Soit  $f \in E$  non nulle telle que  $\psi(f) = \mu f$ , donc  $f = \frac{1}{\mu} \psi(f)$  car  $\mu \neq 0$  d'après 4.1). De plus d'après 1.1) on peut affirmer que  $\psi(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $f$  aussi.

- c) Soit  $\lambda$  valeur propre de  $\psi$  et  $f$  vecteur propr associé, donc  $\psi(f)(x) = \lambda f(x)$ , d'où  $\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$ , en dérivant cette égalité on obtient :  $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$ , dont les solutions sont :  $f(x) = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ , dérivables sur  $]0, +\infty[$  pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ .

### Troisième partie

1) a) Pour tout segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ , on a d'après l'inégalité de Cauchy-

$$\begin{aligned} \text{Schwarz : } \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| &\leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \\ &\leq M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt} \end{aligned}$$

Donc  $fg$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$

b) Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à  $E_2$ , d'autre part, soit  $(f, g) \in E_2, \lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$  car  $f^2, fg, g^2$  sont toutes intégrables, donc  $f + \lambda g \in E_2$  et par suite  $E_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- c) – Symétrie :  $(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = (g, f)$ .  
 – Bilinearité :  $(f + \lambda g, h) = (f, h) + \lambda(g, h)$ , car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.  
 – Positive :  $(f, f) = \int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geq 0$ .  
 – Définie :  $(f, f) = 0 \implies \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = 0 \implies f^2 = 0$ , car  $f^2$  continue positive, donc  $f = 0$ .

2) a)  $\frac{g^2(t)}{t} = g(t)\psi(f)(t) \longrightarrow g(0)\psi(f)(0) = 0$ , quand  $t \longrightarrow 0^+$ , car  $g$  et  $\psi(f)$  sont continues sur  $\mathbb{R}^+$  et  $g(0) = 0$ .

b)  $\frac{g^2(t)}{t^2} = (\psi(f)(t))^2 \longrightarrow (\psi(f)(0))^2$ , quand  $t \longrightarrow 0^+$ , car  $\psi(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , donc  $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$  est intégrable sur  $]0, b]$  car prolongeable par continuité en  $0^+$ .

D'autre part :  $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt$ , par définition de  $\psi(f)$ , pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec  $u = g^2(t), v' = \frac{1}{t^2}$ , donc  $u' = 2g'(t)g(t)$  et  $v = -\frac{1}{t}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[ -\frac{g^2(t)}{t} \right]_0^b + 2 \int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &= -\frac{g^2(b)}{b} + 2 \int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &\quad \text{car : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g^2(t)}{t} = 0 \\ &= -\frac{g^2(b)}{b} + 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \\ &\quad \text{car : } g'(t) = f(t), \frac{g(t)}{t} = \psi(f)(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^b \psi(f)^2(t)dt &\leq 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'après (1)} \\ &\leq 2 \sqrt{\int_0^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt} \\ &\quad \text{D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

Si  $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = 0$ , c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

- d) Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre  $b$  vers  $+\infty$ .  
 e) D'après 2-5) on peut conclure que  $\psi_2$  est 2-lipshitzienne, donc continue.

- 3) a)  
 b) Faire tendre  $b$  vers  $+\infty$  dans (1), en utilisant 3-1).

$$\begin{aligned} \text{4) } \|\psi(f) - 2f\|^2 &= (\psi(f) - 2f, \psi(f) - 2f) \\ &= (\psi(f), \psi(f)) - 4(\psi(f), f) + 4(f, f) \\ &= \|\psi(f)\|^2 - 4(\psi(f), f) + 4\|f\|^2 \\ &= -4(\psi(f), f) + 8\|f\|^2 \quad \text{Car : } \|\psi(f)\| = 2\|f\| \\ &= -4(\psi(f), f) + 2\|\psi(f)\|^2 \quad \text{Car : } \|\psi(f)\| = 2\|f\| \\ &= 0 \quad \text{D'après 3-2)} \end{aligned}$$

Donc  $\psi(f) - 2f = 0$ , ainsi si  $f \neq 0$ , on aurait 2 est une valeur propre de  $\psi$ , impossible puisque les valeurs propres de  $\psi$  sont les  $\lambda \in ]0, 1]$ .

### Quatrième partie

1) a)  $f_a^2(x) = e^{-2ax}$  est évidemment intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , avec :

$$\|f_a\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2ax} dx = \frac{1}{2a}.$$

b) Pour  $x \neq 0$ , on a :  $\psi(f_a)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-at} dt = \frac{1 - e^{-ax}}{ax}$ .

Pour  $x = 0$ , on a :  $\psi(f_a)(0) = f_a(0) = 1$ .

$$(f_a, \psi(f_a)) = \int_0^{+\infty} f_a(x) \psi(f_a)(x) dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-2ax}}{x} dx$$

$$= \frac{1}{a} I(a, 2a)$$

$$= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'après 1-4 de la 1ère partie}$$

$$\left( \frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|} \right)^2 = 2a(\psi(f_a), \psi(f_a)) \quad \text{D'après 1-1}$$

$$= 4a(f_a, \psi(f_a)) \quad \text{D'après 3-2, 3ème partie}$$

$$= 4 \ln a$$

$$\text{D'où : } \frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|} = 2\sqrt{\ln a}.$$

2) a) Pour  $x \neq 0$ , on a :  $\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

Pour  $x = 0$ , on a :  $\psi(f)(0) = f(0) = 1$ .

b) Au voisinage de 0 :  $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de  $+\infty$  :  $f^2(x) \sim \frac{1}{x^2}$ , donc  $f^2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , or  $f$  continue, donc  $f \in E_2$ .

$$\begin{aligned} (f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+u}{1+u}\right)}{1+u} du \quad \text{Avec : } u = \frac{1}{t} \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t} \right) dt \quad \text{On remplace u par t} \\ &= \int_0^1 \frac{(1+t)\ln(1+t) - t\ln t}{t(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t} \right) dt \end{aligned}$$

c)  $(\ln t \ln(1+t))' = \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$ , donc  $\ln t \ln(1+t)$  est une primitive de  $\frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$ .

Calculons d'abord :  $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$  et  $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$ , en effet :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = [\ln t \ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

Intégration par parties avec :

$$u = \ln(1+t) \quad v' = \frac{1}{t}$$

$$u' = \frac{1}{1+t} \quad v = \ln t$$

$$= - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

Car au voisinage de  $0^+$  :  $\ln t \ln(1+t) \sim t \ln t \rightarrow 0$

3)

4) a) les application  $f \mapsto \|f\|$  et  $f \mapsto \psi(f)$  sont continue, or  $f \neq 0$ , donc l'application  $f \mapsto \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$  est continue en tant que composée et rapport d'applications continues.

b)  $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \text{ tel que } f \in E_2 - 0 \right\}$  est un connexe dans  $\mathbb{R}$  en tant qu'image d'un connexe par une application continue, d'autre part :  $0 < \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} < 2$ , puisque  $\psi(f)$  est injective et d'après la question 2-4) 3ème partie, donc c'est un intervalle contenu dans  $]0, 2[$ .

5) a) i. L'application  $f$  est définie ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^s & \text{si : } 0 \leq t \leq a \\ &= -a^s(t - a - 1) & \text{si : } a \leq t \leq a + 1 \\ &= 0 & \text{si : } t \geq a + 1 \end{aligned}$$

$f^2$  est intégrable car son intégrale sur  $\mathbb{R}^+$  est égale à celui sur  $[0, a + 1]$ , avec :

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_0^a t^{2s} dt - a^{2s} \int_a^{a+1} (t - a - 1)^2 dt \\ &= \frac{a^{2s+1}}{2s+1} - \frac{a^{2s}}{3} \sim \frac{a^{2s+1}}{2s+1} \end{aligned}$$

ii. D'abord pour  $0 \leq x \leq a$ , on a :

$$\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^s dt = \frac{x^s}{s+1}, \text{ car :}$$

$$2s+1 > 0 \implies s > -\frac{1}{2} \implies s+1 > 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{s+1} = 0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|\psi(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(x) dx \geq \int_0^a \psi(f)^2(x) dx = \\ &= \int_0^a \frac{x^{2s}}{(s+1)^2} dx = \frac{a^{2s+1}}{(s+1)^2(2s+1)} = \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)} \cdot \frac{1}{2(s+1)} \geq \\ &= \frac{1}{(s+1)(2s+1)}, \text{ car } 2(s+1) = 2s+2 > 1. \end{aligned}$$

iii. D'après les deux questions précédentes, en faisant tendre  $a$  vers

$$+\infty, \text{ on aura : } \sup \left( \frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \geq \frac{2}{s+1} \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2s+1 > 0,$$

donc pour  $s \geq -\frac{1}{2}$ , en faisant tendre  $s$  vers  $-\frac{1}{2}$ , on obtient :  $\sup \left( \frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \geq 4$ , d'où :  $\sup \left( \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \geq 2$ , or

d'après la question 4.2) on a :  $\sup \left( \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \leq 2$ , d'où l'égalité.

b) i. Au voisinage de  $+\infty$  on a :  $f^2(t) = \frac{1}{t^{2\alpha+2}}$  est bien intégrable car  $2\alpha+2 > 1$ , avec :

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_0^{+\infty} f^2(t) dt = \int_0^1 t^{2\alpha} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha+2}} dt \\ &= \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{2}{2\alpha+1} \end{aligned}$$

ii. Déterminons d'abord  $\psi(f)(x)$  pour  $x \geq 0$ .

1er cas :  $0 \leq x \leq 1$ , alors :

$$\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^\alpha dt = \frac{x^\alpha}{\alpha+1}.$$

2ème cas :  $x \geq 1$ , alors :

$$\begin{aligned} \psi(f)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \left( \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \int_0^1 t^\alpha dt + \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{x^\alpha} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\psi(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{(\alpha+1)^2} dx + \int_1^{+\infty} \left( \frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{(2\alpha+1)^2}{\alpha^2(\alpha+1)^2} - \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{4\alpha^2-1}{\alpha^2(\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &\sim_{+\infty} \frac{4}{\alpha^2} \end{aligned}$$

iii. D'après les deux questions précédentes, on aura :  $\inf \left( \frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \leq \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2}$  pour  $\alpha > 0$  assez grand, quand

$\alpha \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\inf \left( \frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \leq 0$ , or d'après la question 4.2) on a :  $\inf \left( \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \geq 0$ , d'où l'égalité.

**Fin.**