Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°24 (Pr Bouchikhi)

Séries entières

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Vous savez comment font les bergers pour vérifier que leur troupeau de mouton est complet ?
- Réponse : Ils prennent une suite de moutons de gauchers (qui mâchent avec la mâchoire gauche), leurs mettent de l'herbe du côté droit, et observent s'ils y convergent, c'est ce qu'on appelle le principe des bergers.

Jean Gaston Darboux (1842-1917)

Mathématicien français, ses travaux concernent l'analyse (intégration, équations aux dérivées partielles) et la géométrie différentielle (étude des courbes et des surfaces). Ils ont été une source d'inspiration pour les frères Cosserat (≪ milieux à directeur ≫) aussi bien que pour Henri Cartan (≪ méthode du repère mobile ≫). Il reçoit le grand prix de l'Académie des sciences, ainsi que la médaille Sylvester de la Royal Society

Mathématicien du jour

A. Une relation entre coefficients binomiaux :

1. Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2) : n\leq m$

$$(1+X)^m.(1+X)^m=(1+X)^{2m} \iff [\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}X^k]^2=\sum_{n=0}^{2m}\binom{2m}{n}X^n$$

$$\iff \sum_{n=0}^{2m}[\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\cdot\binom{m}{n-k}]X^n=\sum_{n=0}^{2m}\binom{2m}{n}X^n$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\cdot\binom{m}{n-k}=\binom{2m}{n}\ ,\ \forall n\in\{0,1,...,m\}$$

2. (a) f est une combinaison linéaire des fonctions polynômiales en α ,

donc elle est polynômiale en α et d'après la question $1.A$, on a: $f(m)=0$, $\forall m\geq n$

(b) D'après la question $2.A.a$, f est polynômiale , admettant une infinité de racines , donc f est nulle , puis : $\binom{2\alpha}{n}=\binom{\alpha}{k}\cdot\binom{\alpha}{n-k}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

B. Recherche d'un équivalent :

1. La série $\sum\limits_{n\geq 0}\omega_n$ est sommable donc $\omega_n\longrightarrow 0$ et $\ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})=\ln(1+\omega_n)\sim\omega_n$ d'où

$\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)\ \sim\ \omega_n$ et la série téléscopique $\sum\limits_{n\geq 0}\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)$ converge , et sa somme vérifie : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}[\ln(a_n)-\ln(a_0)]$, par suite $(\ln(a_n))_{n\geq 0}$ converge ; Ainsi $(a_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}a_n=a_0.\exp(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\ln(a_{n+1})-\ln(a_n))$

.

2. (a) La régle de D'Alembert donne :

$\frac{(n+1)^\gamma.b_{n+1}}{n^\gamma.b_n} = (1+\frac{1}{n})^\gamma.\frac{b_{n+1}}{b_n} = (1+\frac{\gamma}{n}+O(\frac{1}{n^2}))(1-\frac{\gamma}{n}+\omega'_n) = 1+\omega'_n-\frac{\gamma^2}{n^2}+\frac{\gamma}{n}\omega'_n+O(\frac{1}{n^2})$

Si $\omega''_n = \omega'_n-\frac{\gamma^2}{n^2}+\frac{\gamma}{n}\omega'_n+O(\frac{1}{n^2})$ alors $\sum\limits_{n\geq 0}\omega''_n$ converge par éclatemment , donc d'aprés la question $1.B$ la suite $(n^\gamma b_n)_{n\geq 1}$ converge et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^\gamma b_n = \ell > 0$ d'où $b_n \sim \frac{\ell}{n^\gamma}$

(b) On a: $b_n \sim \frac{\ell}{n^\gamma}$, donc le critère de Reimann permet de conlure que : $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge $\Longleftrightarrow \gamma > 1$

3. (a) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(-1)^n\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n)}{(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)}.\frac{n!}{(n+1)!} = -\frac{(\frac{1}{2}-n)}{n+1} = \frac{2n-1}{2n+1}$

(b) $(c_n)_{n\geq 0}$ est une suite a terme strictement positif tel que : $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n-1}{2n+1} = 1-\frac{3}{2n}+\circ(\frac{1}{n^2})$

La suite $(\circ(\frac{1}{n^2}))_{n\geq 1}$ est sommable , donc D'après la question $2.B$ il existe $C>0$ tel que :

$c_n \sim \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$, d'où $\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ n\end{matrix} \sim C.\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}$

C. Résultat d'approximation:

1. On a: $(-1)^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix} = -c_n$ et $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n-1}{2n+1} \longrightarrow 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix} z^n$ est donc égal à 1

2. On a: $\forall\, z \in \overline{D(0,1)}$, $|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}.(-1)^n.z^n| \leq |\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}| \sim \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$

Comme la série de Reimann $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$converge , alors la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}.(-1)^n.z^n$ converge normalement sur le disque $\overline{D(0,1)}$

.

3. Soit $z \in \overline{D(0,1)}$, on a : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}.(-1)^n.z^n$ et la série $\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n}.(-1)^n.z^n$ converge absolument , donc le produit de cauchy de la série $\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n}.(-1)^n.z^n$ par elle même donne :
$(f(z))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n[\sum_{p=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{p} \binom{\frac{1}{2}}{n-p}]z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \binom{1}{n} z^n = 1 - z$

4. D'après la question $2.C$, on a: f est de clase $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et $(f(x))^2 = 1-x$, $\forall x \in [-1,1]$, donc $2.f'(x).f(x) = -1$ par suite $f(x) \neq 0$ $\forall x \in]-1,1[$ et f garde un signe constant sur $]-1,1[$
Or $f(1) = 0$ et $f(-1) = \sqrt{2}$, donc s'il existe $\alpha \in]-1,1[$ tel que $f(\alpha) < 0$ alors f change de signe sur $]-1,1[$, ce qui est impossible d'où $f(x) > 0$, $\forall x \in]-1,1[$
Par conséquent $f(x) = \sqrt{1-x}$, $\forall x \in [-1,1]$

5. (a) $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n)}{n!} = (-1)^{n-1}.\frac{1.3.5...(2n-3)(2n-1)}{2^n n!(2n-1)} = (-1)^{n-1}.\frac{(2n)!}{2^n.2.4...(2n).n!.(2n-1)}$
$= (-1)^{n-1}.\frac{(2n)!}{2^{2n}.(n!)^2.(2n-1)} = (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}.(2n-1)}$

(b) On a :$\forall x \in [-1,1]$, $1-x^2 \in [-1,1]$, donc $f(1-x^2) = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|$
De plus $L_n(x) = -\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}(2k-1)}(1-x^2)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}(1-x^2)^k$
et la série $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers f , donc $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $x \longmapsto f(1-x^2) = |x|$

FIN
FIN

À la prochaine