Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°20

Fonctions dzêta de Riemann

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Combien faut-il de mathématiciens pour changer une ampoule ?
- Aucun. C'est laissé au lecteur en exercice (problème ouvert).
- Aucun. Un mathématicien ne peut pas changer une ampoule, mais il peut prouver que cela est faisable. - Un. Il la donne à un physicien et ramène ainsi le problème à un problème précédemment résolu.
- Un seul, une fois que vous avez réussi à lui présenter le problème dans des termes qu'il peut comprendre.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Mathématicien du jour

German mathematician who made lasting contributions to analysis and differential geometry, some of them enabling the later development of general relativity. His father was a poor Lutheran pastor who fought in the Napoleonic Wars. His mother, died before he had reached adulthood. Riemann exhibited exceptional mathematical skills, such as fantastic calculation abilities, from an early age but suffered from timidity and a fear of speaking in public.

1 Déterminer le domaine de définition de $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2 Soit $s > 1$. Exprimer après avoir justifié son existence, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$ en fonction de $\zeta(s)$.

3 Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine, en déduire ses dérivées successives.

4 Prouver que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$. Indication : majorer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ par comparaison une intégrale.

5 Prouver que $\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$

6 Montrer que la fonction ζ est décroissante et convexe sur $]1, +\infty[$. Tracer la courbe de ζ.

7 Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + o(2^{-x})$.

8 Constante d'Euler : Soit γ définie par : $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$

Montrer que γ existe et que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}$.

9

a. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \dfrac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.

b. En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \dfrac{1}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{e^{-2x}-1} = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2x}{x^2+k^2\pi^2}$.

c. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

10

Fonction êta de Riemann : Pour $x > 0$: $\eta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a. Montrer que η est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b. Établir pour $x > 1$: $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$. En déduire $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$ pour $x \longrightarrow 1^+$.

c. Montrer que $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + \o(1)$. On remarquera que $\dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^x}$.

c. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

d. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

e. Montrer que $\forall s > 1$, $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$, où $2 = p_1 < p_2 < .. < p_n < ..$ les nombres premiers.

f. Pour $s > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n^{-s}$ est-elle convergente ? La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n^{-1}$ est-elle convergente ?

11

Pour tout entier naturel n on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels plus petits que n et premiers avec n, dite fonction indicatrice d'Euler. Montrer que $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ puis que pour tout réel $x > 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^x} = \dfrac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$.

12

Soit u définie par $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^q}$ pour tout $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$.

a. Montrer que la suite u est sommable et calculer sa somme.

b. Prouver l'identité suivante : $\displaystyle\sum_{q=2}^{+\infty} (\zeta(q) - 1) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^q} - 1 \right) = 1$.

13

Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leurs existences :

a. $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \dfrac{1}{p^2q^2}$
Réponse : $A = \zeta(2)^2$

b. $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p|q} \dfrac{1}{p^2q^2}$
Réponse : $B = \zeta(2)\zeta(4)$.

c. $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p\wedge q=1} \dfrac{1}{p^2q^2}$
Réponse : $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

d. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=p}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{q^3}$.
Réponse : $-\dfrac{7}{8}\zeta(3)$.

Soit $s > 1$. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{sE(x)}{x^{s+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \zeta(s)$

Fin

À la prochaine