Semaine 18 : *Intégration sur un segment*

Mercredi 28 Avril 2004

Exercice 1:

Mines MP 2001 : Soit $a < 0 < b$ et f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[a,b]$ telle que $\int_0^1 f = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leq -ab$.

Exercice 2:

Formule d'intégration par parties généralisée : Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classes $\mathcal{C}^n$.

1. Montrer que $\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \Big[(-1)^k f^{(n-1-k)} g^{(k)}\Big]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(t)g^{(n)}(t)dt.$
2. Application : Soit $P(X) = (X-a)^n(X-b)^n$. Montrer que $\int_a^b P^{(n)}(t)Q(t)dt = 0 \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 3:

Fonctions affines : Soit $F = \big\{f \in \mathcal{C}^2([a,b]),\ \text{tel que } f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\big\}$.

1. Soit f continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $g \in F$ vérifiant $g'' = f$ si et seulement si $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$.
2. Soit f continue sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)g''(x)dx = 0$ pour toute fonction $g \in F$. Montrer que f est affine.

Exercice 4:

Mines MP 2000 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, 2π périodique, ne s'annulant pas. Montrer que $I(f) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}dt$ est un entier.

Exercice 5:

Centrale PC 1998 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue.

1. Montrer qu'il existe une subdivision de $[a,b]$: $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ telle que : $\forall\ k \in [|0, n-1|],\quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt.$
2. Étudier $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc