Systèmes linéaires - déterminants

Table des matières

1 Systèmes linéaires

On s'intéresse ici à des systèmes linéaires de n équations à p inconnues. La technique du pivot de Gauss, vue depuis Septembre, est un prérequis...

1.1 Quelques formalismes équivalents

Un système de n équations linéaires à p inconnues $x_1, ..., x_p$, avec $y_1, ..., y_p$ comme seconds membres se ramène à l'équation matricielle $AX = Y$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ou bien à la recherche d'un antécédent x à $y = (y_1, ..., y_n)$ par l'application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.

On jonglera entre les différents points de vue selon le contexte.

1.2 Nature géométrique de l'ensemble des solutions

Notons $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions au système initial ($u(x) = y$, ou $AX = Y$), et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions au système homogène ($u(x) = 0$, ou $AX = 0$). $\mathcal{S}_H$ n'est jamais vide (il contient 0), mais $\mathcal{S}_E$ peut très bien être vide (si y n'est pas dans l'image...). Plus précisément, on établira sans problème la nature géométrique de ces deux ensembles :

PROPOSITION 1 *$\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. Par ailleurs, si $\mathcal{S}_E$ est non vide et $x_0 \in \mathcal{S}_E$, alors $\mathcal{S}_E = x_0 + \mathcal{S}_H$.*

Dans la dernière égalité, $x_0 + \mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble $\{x_0 + x \,|\, x \in \mathcal{S}_H\}$. On parle de "sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$".

EXEMPLES 1

On vérifiera rapidement les faits suivants :

- *L'ensemble des $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ est un singleton.*
- *L'ensemble des $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ est une droite[1] de $\mathbb{R}^2$.*
- *L'ensemble des $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ est vide.*
- *L'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 = 2 \\ \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_3 = 4 \end{cases}$ est un singleton.*
- *L'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ est une droite affine.*
- *L'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ est un plan affine.*

DÉFINITION 1

Le rang du système $AX = Y$ est le rang de la matrice A. C'est également le rang de u, avec le point de vue $u(x) = y$...

REMARQUE 1 Bien entendu, $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{Max}(n, p)$, et le théorème du rang nous donne : $\dim \mathcal{S}_H = p - \operatorname{rg} A$. Cette simple remarque nous dit que si le nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations ($n < p$), alors $\dim \mathcal{S}_H = p - \operatorname{rg} A \geq p - n \geq 1$, donc $\mathcal{S}_H \neq \{0\}$: $\mathcal{S}_E$ n'est alors JAMAIS un singleton.
De même, si $\operatorname{rg} A < n$, l'application u n'est pas surjective : pour "beaucoup" de y, l'équation $u(x) = y$ n'aura pas de solution x. Lorsqu'il y en aura une, $\mathcal{S}_E$ sera un sous-espace affine qui aura TOUJOURS pour dimension $\dim \mathcal{S}_H = p - \operatorname{rg} A$.

[1] Attention, il ne s'agit pas d'une droite vectorielle (de la forme $\mathbb{K}\overrightarrow{u}$) mais d'une droite affine...

1.3 Les systèmes de Cramer...

Ce sont les systèmes à n équations, n inconnues... de rang n : ils admettent alors une unique solution (point de vue matriciel ou point de vue géométrique...). Leur résolution par pivot de Gauss se fera sans soucis : à chaque étape, on peut trouver un pivot non nul (la matrice est de rang n...).

EXERCICE 1 *Résoudre le système* $\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 2 \end{cases}$

REMARQUE 2 Si la résolution de $AX = Y_0$ (pour un Y_0 donné) fournit une unique solution, on sait alors que le système est de rang n, et donc, le système $AX = Y$ admettra une unique solution quelque soit Y.

EXERCICE 2 *Montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *est inversible, et calculer* A^{-1}.

1.4 Et les autres !

EXERCICE 3 *Résoudre soigneusement les systèmes $AX = Y$ suivants (en décrivant précisément l'ensemble des solutions, et en discutant éventuellement...) :*

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *(rang 3, pivot toujours en place) et* $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *puis* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ *et enfin* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(rang 3, mais deux lignes à échanger pour trouver un pivot à la seconde étape) et* $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *puis* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et enfin* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(rang 2, donc discussion... et deux colonnes à échanger pour trouver un pivot à la seconde étape) et* $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *puis* $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et enfin* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Il n'y a rien à connaitre dans le cas général. Essayons de concilier les points de vue géométriques et algorithmiques, pour un système à n équations, p inconnues, de rang r. N'oublions jamais que les opérations élémentaires sur les matrices conservent le rang, et que celles sur les systèmes permettent de travailler par équivalence.

Repassons au ralenti la scène du calcul du rang... par pivot de Gauss. Lorsqu'il n'y a pas de pivot en position (k, k) après k étapes, on privilégie les changements de lignes (en recherchant un pivot sur la k-ième colonne).

- Si à chaque étape on a trouvé un pivot sur la colonne “naturelle” : lors de la résolution de $AX = Y$, les mêmes opérations conduiront à un système de la forme

  $$\begin{pmatrix} T & \vdots & R \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ (0) & \vdots & (0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_n(y) \end{pmatrix}$$

  avec $\varphi_1, ..., \varphi_n$ des formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$, $R \in \mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ triangulaire supérieur à éléments diagonaux tous non nuls. Ce système admet une solution x si et seulement si $\varphi_{r+1}(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$ (ce qui, au passage, permet de décrire $\operatorname{Im} u$ comme intersection de $n - r$ hyperplans...).

Lorsque ces équations sont vérifiées, du fait du caractère triangulaire du bloc supérieur gauche, tout choix de $(x_{r+1}, ..., x_n)$ autorise un unique $(x_1, ..., x_r)$ tel que $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{S}_E$, ce qui permet de décrire $\mathcal{S}_E$ en prenant $(x_{r+1}, ..., x_n)$ comme paramètres : on aura alors une description de $\mathcal{S}_E$ comme sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de dimension $n - r$ (théorème du rang), avec pour le même prix une base de la direction $\mathcal{S}_H$.

- Si, à l'étape k, il n'y a pas de pivot sur la k-ième colonne, on a dû échanger deux colonnes dans le calcul du rang : lors de la résolution de $AX = Y$, cela revient à changer l'ordre des inconnues. On va ainsi arriver à un système équivalent au système initial, et de la forme :

$$\begin{pmatrix} T & \vdots & R \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ (0) & \vdots & (0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \vdots \\ \varphi_n(y) \end{pmatrix}$$

avec σ une permutation de $[\![1, p]\!]$.
La fin de la résolution est la même que dans le cas précédent, mais on prend cette fois comme paramètres $x_{\sigma(r+1)}, ..., x_{\sigma(n)}$. La description géométrique restera de même nature.

1.5 Base de l'image

On a déjà vu deux méthodes pour trouver une base de l'image d'une application donnée par une matrice :

- On calcule le rang r, et si celui-ci n'est pas trop élevé, on peut voir sur la matrice r colones indépendantes, fournissant ainsi une base de l'image (en revenant à des vecteurs).
- On résoud formellement le système $AX = Y$, et on obtient une CNS d'existence d'une solution X qui ne porte que sur les Y : on a ainsi décrit l'image comme intersection d'hyperplans. En résolvant à nouveau le système des $p - r$ équations (homogènes) portant sur Y, on trouve enfin une base de l'image !

La première technique est souvent très efficaces dans les cas pratiques, mais peut s'avérer délicate en cas de paramètres, ou lorsque $r \geq 3$... La seconde nécessite deux pivots... et on va voir qu'on peut se contenter d'un seul.
Remarquons tout d'abord les deux faits suivants :

- Si $\alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2 - \alpha_2 v_1, ..., v_p - \alpha_p v_p)$ (le vérifier tout de même...) si bien que des opérations telles que $C_i \leftarrow C_i - \alpha C_j$ (avec $i \neq j$) ne modifient pas l'espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice considérée.
- Si A est de la forme $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & & 0 & \\ & a_{2,2} & 0 & & \vdots & \\ & & a_{3,3} & & \vdots & (0) \\ & & & \ddots & 0 & \\ & (*) & & & a_{r,r} & \\ & & & & \vdots & \end{pmatrix}$ avec $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, alors les r premières colonnes de A sont libres (échelonnées...) donc constituent une base de l'image.

Pour obtenir une base de l'image de l'application associée à A entre deux bases données $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, on effectue donc des opérations élémentaires **sur les colonnes** pour arriver à une forme échelonnée : la nouvelle matrice ne représente pas la même application linéaire, mais ses r premières colonnes représentent bien (dans la base $\mathcal{F}$...) une base de l'image de l'application initiale.

EXEMPLE 2 *Prenons* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. *La première étape du pivot conduit à* $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On recherche un pivot sur la seconde ligne, pour arriver à $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *qui est échelonnée, et une base de l'image de* A *est donc constituée des deux colonnes* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Remarque 3 Il ne faut pas pivoter sur les lignes (ce qui reviendrait à changer la base $\mathcal{F}$ dans laquelle on représente les vecteurs). On peut alors être coincé pour trouver un pivot sur la bonne ligne. Dans ce cas, on repart de la ligne juste en dessous, et on arrivera ainsi à une forme échelonnée.

Exemple 3 *Prenons* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. *La première étape du pivot conduit à* $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Il n'y a pas de pivot sur la deuxième ligne ; on repart donc de la troisième : un pivot est présent sur la troisième colonne, d'où l'opération* $C_2 \leftrightarrow C_3$ *qui nous amène à la matrice* $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *puis après un coup de pivot :* $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *et une dernière recherche de pivot nous amène à échanger les colonnes 3 et 4, pour arriver à* $B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *qui est échelonnée, et ainsi, une base de l'image de* B *est constituée des trois vecteurs-colonnes* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2 Déterminants

On va privilégier ici une approche matricielle du déterminant ; cela permet d'atteindre rapidement les premiers objectifs. Pour mieux comprendre la véritable nature (géométrique) du déterminant, la présentation faite en deuxième année privilégiera le point de vue géométrique : déterminants de vecteurs, puis d'applications linéaires, et enfin seulement de matrices.

2.1 En dimension 2

On a déjà noté que la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bd \neq 0$. En effet, l'inversibilité est équivalente au fait que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont libres, etc...

Définition 2
Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on définit son déterminant par : $\det A = ad - bc$; il est également noté $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. Par ailleurs, si $\mathcal{E}$ est une base de E (espace de dimension 2) et $v_1, v_2 \in E$, on définit $\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2) = \det \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(v_1, v_2)$.

Avec ces définitions, on obtient directement le :

Fait 1 *L'application* $\det_{\mathcal{E}}$ *(qui va de* E^2 *dans* $\mathbb{K}$*) est bilinéaire (à* v_1 *fixé, l'application* $v_2 \mapsto \det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2)$ *est linéaire ; même chose à* v_2 *fixé) et alternée (*$\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_1) = 0$*).*

Cette propriété sera en fait fondatrice dans la construction du déterminant en dimension quelconque. On en déduit les résultats suivants :

Corollaire 1
- $\det_{\mathcal{E}}(v_2, v_1) = -\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2)$ *("antisymétrie") : développer* $\det_{\mathcal{E}}(v_1 + v_2, v_1 + v_2)$*...*
- $\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2 + \lambda v_1) = \det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2)$*.*

Ainsi, les opérations élémentaires sur les matrices conserveront le caractère nul ou non nul des déterminants ; on en déduit le :

Fait 2 *A est inversible si et seulement si son détemrinant est non nul.*

Le résultat suivant n'est pas évident du tout, vu la présentation choisie ; on le vérifierait par exemple par un calcul brutal...

Proposition 2 *Si* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$*, alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$*.*

Corollaire 2 *Si A et B sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, alors elles ont même déterminant (utiliser la formule de changement de base).*

Définition 3
Si $u \in \mathcal{L}(E)$, son déterminant est le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base[2].

Remarque 4 Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$, avec la notion intuitive d'aire pour un rectangle, un triangle... l'unité d'aire étant celle du carré de bases $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Si v_1 et v_2 sont colinéaires respectivement à e_1 et e_2, alors $\left|\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2)\right|$ est l'aire du carré de bases v_1 et v_2. Maintenant, si $v_2' = v_2 + \alpha v_1$, alors le parallélogramme de bases v_1 et v_2' aura la même aire que le carré précédent (faire un dessin, et des couper/coller virtuels...), qui vaut $\left|\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2)\right|$, mais aussi $\left|\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2')\right|$. Mais si $v_1' = v_1 + \beta v_2'$, alors l'aire du parallélogramme est toujours la même (dessin...). Ainsi, d'une manière générale, $\left|\det_{\mathcal{E}}(v_1, v_2)\right|$ est l'aire du paralélogramme de bases v_1 et v_2.

Remarque 5 Certains ont peut-être vu en terminale les mystérieuses "formules de Cramer" pour la résolution de systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues. On sait que le système $\begin{cases} ax_1 + cx_2 = y_1 \\ bx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$ admet une solution si et seulement si $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$. Lorsque c'est le cas, on a : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, donc en utilisant le caractère multilinéaire alterné du déterminant :

$$\begin{vmatrix} y_1 & c \\ y_2 & d \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} c & c \\ d & d \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

de sorte que : $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & c \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}\cdot$ on trouve de même : $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ b & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}\cdot$ Ce sont les fameuses formules de Cramer...

[2]cette définition a bien un sens d'après la proposition précédente.

En pratique, les déterminants servent surtout à caractériser les familles libres, ou les automorphismes. Plus précisément, voici deux conséquences plus ou moins directes des définitions et résultats de cette partie :

FAIT 3 *La famille (v_1, v_2) constitue une base de E si et seulement si son déterminant (dans n'importe quelle base) est non nul*[3]. *De même, $u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme (i.e. est bijectif) si et seulement si son déterminant est non nul.*

2.2 En dimension 3

Ici encore, le Graal est la construction d'une “forme tri-linéaire alternée”...

DÉFINITION 4
On définit le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ par :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \big(aei + gbf + dhc\big) - \big(gec + dbi + ahf\big).$$

Si $\mathcal{E}$ est une base d'un espace E de dimension 3 et $v_1, v_2, v_3 \in E$, on définit $\det\limits_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, v_3) = \det \operatorname{Mat}\limits_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, v_3)$.

Comment retenir la formule précédente ?

- Chaque terme est un produit de 3 termes : un pour chaque ligne et chaque colonne.
- Les termes positifs sont ceux “orientés comme la première diagonale” `aei` et les négatifs sont ceux orienté comme la seconde diagonale `ceg`.
- C'est inutile de la retenir, comme le montreront les techniques de calcul qui vont suivre !

Tout comme en dimension 2, on constate que l'application $(v_1, v_2, v_3) \in E^3 \mapsto \det\limits_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, v_3)$ est tri-linéaire et alternée (le vérifier tout de même !). En conséquence, $\det\limits_{\mathcal{E}}(v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3 + \beta v_1) = \det\limits_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, v_3)$. Au niveau matriciel, cela revient à dire que les opérations $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ $(i \neq j)$ préservent le déterminant. Même chose concernant les lignes. Par contre, chaque opération de type $C_i \leftrightarrow C_j$ change le déterminant en son opposé (le prouver pour $C_1 \leftrightarrow C_3$...).

EXERCICE 4 *En utilisant des opérations élémentaires, montrer que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.* On pourra exécuter des opérations élémentaires sur les colonnes pour rechercher le rang...

Les résultats et remarques suivants sont les homologues de ceux vus en dimension 2 :

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; on en déduit la définition du déterminant d'un endomorphisme (on aura d'ailleurs celui-ci bijectif si et seulement si celui-là est non nul).
- Le système linéaire $AX = Y$ admet une unique solution si et seulement si $\det A \neq 0$. De plus, si on note C_1, C_2, C_3 les 3 colonnes de A, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors : $x_1 = \dfrac{\left| Y \vdots C_2 \vdots C_3 \right|}{\left| C_1 \vdots C_2 \vdots C_3 \right|}$, avec des formules similaires pour x_2 et x_3.
- Si on travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E}$, et en prenant pour unité de volume celui du cube de base $\mathcal{E}$, alors $\left|\det\limits_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, v_3)\right|$ est le volume du tétraèdre de base (v_1, v_2, v_3). On voit alors bien pourquoi (v_1, v_2, v_3) est une base si et seulement si $\det\limits_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, v_3) \neq 0$.

[3] Attention, contrairement aux endomorphismes, changer de base va changer le déterminant de (v_1, v_2) : changer de base revient en effet à changer l'unité d'aire...

Pour calculer un déterminant en dimension 3, on peut bien sûr utiliser la formule initiale, mais aussi faire des opérations sur les lignes et colonnes pour se ramener à une matrice plus simple. Il ne faut jamais perdre de vue que la grande question est de savoir si oui ou non, ce déterminant est nul ou non : on privilégie donc les formes factorisées.

EXERCICE 5 *Calculer* $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$ *sous forme factorisée.*

Le constat suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

peut se généraliser de la façon suivante : si on fixe une colonne j, on a $\det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A'_{i,j}$, avec $A'_{i,j}$ la matrice qu'on obtient en faisant disparaître la ligne i et la colonne j de A. On parle alors de développement du déterminant selon la i-ième colonne. On constate le même phénomène pour les lignes : $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A'_{i,j}$. En pratique, ces développements selon les lignes ou colonnes sont intéressants lorsque l'une d'entre-elles possède beaucoup de zéros. Pour retenir les signes, retenons qu'en position (1,1), le terme est compté positivement, puis il y a alternance selon les lignes et aussi les colonnes :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 4 $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

EXERCICE 6 *Calculer de quatre façons différentes* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

2.3 Applications à la géométrie

Citons quelques cas où les déterminants interviendront naturellement en géométrie :

- Dans les calculs de surfaces (en dimension 2) ou volume (en dimension 3).
- Trois points M_1, M_2, M_3 du plan sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont colinéaires, ce qui revient à la condition algébrique $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$, ou encore $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (calculer ce dernier déterminant en retranchant la première colonne aux autres).
- Pour obtenir une équation cartésienne d'une droite (du plan) donnée par deux points distincts A et B, il suffit d'écrire (dans n'importe quelle base $\mathcal{F}$) : $\det_{\mathcal{F}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$, ce qui fournit une équation de la forme $ax + by = c$. Par rapport à la méthode "pente puis ordonnée à l'origine" dont vous avez du mal à vous défaire (...), le gros avantage est de ne pas privilégier une coordonnée par rapport à l'autre : il n'y a ainsi pas de cas particulier à traiter pour une droite parallèle à l'axe des y.
- En dimension 3, la même démarche fournira une équation de la forme $ax + by + cz = d$ pour un "plan affine", donné par trois points non alignés.
- L'orientation de l'espace (à l'aide d'une base de référence) fera intervenir le signe d'un déterminant : attendre quelques semaines !

2.4 Extension en dimension quelconque

La notion de déterminant s'étend en dimension quelconque :

- Pour les vecteurs : dans une base donnée $\mathcal{E}$, il existe une unique application φ multi-linéaire alternée telle que $\varphi(e_1, ..., e_n) = 1$. On a alors $\varphi(f_1, ..., f_n) \neq 0$ si et seulement si $(f_1, ..., f_n)$ est une base.
- Pour les endomorphismes : si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\det u$ est un scalaire tel que pour toute base $\mathcal{E}$ et famille $(v_1, ..., v_n)$, on a $\det_{\mathcal{E}} \big(u(v_1), ..., u(v_n)\big) = \det u . \det_{\mathcal{E}} (v_1, ..., v_n)$. Il est non nul si et seulement si u est bijectif.
- Pour les matrices : $\det A \neq 0$ si et seulement si A est inversible.

Le calcul pratique des déterminants se fera par des opérations élémentaires, et par des développements selon les lignes ou colonnes.

EXERCICE 7 *Donner une CNS simple sur les λ_i pour que la matrice V soit inversible :*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 \end{pmatrix}$$