Résumé de cours : *Espaces vectoriels*
Partie I : *Généralités*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$, et en général sauf mention du contraire, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$ et E un ensemble non vide.

1 Vocabulaire :

1.1 Loi de composition interne :

Définition 1. *Une LCE sur E à base dans $\mathbb{K}$ est la donnée d'une applicaltion :* $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.

1.2 Structure d'espace vectoriel :

Définition 2. *E sera dit un $\mathbb{K}$-ev s'il est muni d'une LCI $+$ et d'une LCE . à base dans $\mathbb{K}$ et qui vérifient les axiomes suivants :*

1) *$(E,+)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera noté dorénavant par 0_E.*
$\forall (x,y)\in E^2,\quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ *on a les propriétés suivantes :*

2) $(\alpha+\beta).x = \alpha.x+\beta.x$.

3) $\alpha.(x+y) = \alpha.x+\alpha.y$.

4) $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$.

5) $1.x = x$.

Dans toute la suite du chapitre E est muni d'une structure d'un $\mathbb{K}$-ev,

1.3 Régles de calcul :

Proposition 1. $\forall x\in E, \forall \alpha\in\mathbb{K}$ *on a les régles de calculs suivants :*

1) $0.x = 0_E$.

2) $\alpha.0_E = 0_E$.

3) $(-\alpha).x = \alpha.(-x) = -(\alpha.x)$.

1.4 Structure de sous-espace vectoriel :

Définition 3. *Une partie F de E est dite sous espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) $0_E\in F$.

2) $\forall (x,y)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbb{K}$ *on a : $x+\lambda y\in F$, autrement dit F est stable pour les deux lois, interne et externe.*

Remarque :
Tout sous espace vectoriel de E est lui même un espace vectoriel , et tout espace vectoriel inclu dans E est un sous espace vectoriel de E, ainsi pour mon montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel , il est judicieux de montrer que c'est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

1.5 Structure d'algèbre :

Définition 4. *On appelle algébre sur $\mathbb{K}$, tout ensemble A muni de deux LCI $+, \times$ et d'une LCE,., telle que :*

1) $(A, +, .)$ *soit un $\mathbb{K}$-ev*

2) $(A, +, \times)$ *soit un anneau.*

3) $\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, *on a :* $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

Définition 5. *Une partie F sera dite sous-algébre de E si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1) $0_E \in F$.

2) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *on a :* $x + \lambda y \in F$ *et* $x \times y \in F$, *autrement dit F est stable pour les deux lois internes et celle externe.*

1.6 Applications linéaires

Définition 6. *Soit F un autre $\mathbb{K}$-ev et $u : E \to F$, on dira que u est linéaire si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a : } u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Vocabulaire et notations :

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.
- Une application linéaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de E vers F se note $\mathcal{I}som_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition 2. *Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes :*

1) $u(0_E) = 0_F$.

2) *L'image directe et celle réciproque d'un sous espace vectoriel est aussi un sous espace vectoriel .*

3) $\ker u = \{x \in E \text{ tel que : } u(x) = 0_F\}$ *est un sous espace vectoriel de E, on l'appelle noyau de u.*

4) *u est injective si et seulement si* $\ker u = \{0_E\}$.

5) *$Im\ u = u(E)$ est un sous espace vectoriel de F, on l'appelle image de u.*

6) *u est surjective si et seulement si $Im\ u = F$.*

7) $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, .)$ *est un $\mathbb{K}$-ev ,en particulier la somme de deux applications linéaires est aussi linéaire.*

8) *La composée de deux applications linéaires est aussi linéaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.*

9) *La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ est un groupe, on l'appelle le groupe linéaire de E.*

2 Projecteurs :

2.1 Somme de deux sous espace vectoriel d'un espace vectoriel :

Définition 7. *Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous espace vectoriel de E, la somme de F et G est le sous espace vectoriel de E noté $F+G$ défini par $F+G=\{x=x_1+x_2$ tel que : $x_1\in F, x_2\in G\}$.*
Si de plus $F\cap G=\{0_E\}$, on dit que la somme est directe et on la note plutôt par $F\oplus G$.
Si de plus $E=F\oplus G$, on dit que les sous espace vectoriel F et G sont supplémentaires dans E, et dans ce cas $\forall x\in E, \exists! x_1\in F$ et $\exists! x_2\in G$ tel que : $x=x_1+x_2$.

2.2 Projection sur sous espace vectoriel par rapport à un autre :

Définition 8. *Si $E=F\oplus G$, soit $x\in E, x_1\in F$ et $x_2\in G$ tel que : $x=x_1+x_2$. x_1 s'appelle la projection de x sur F parallélement à G et se note $p_{F//G}(x)$ et x_2 s'appelle la projection de x sur G parallélement à F et se note $p_{G//F}(x)$.*

Proposition 3. *Avec les notations précédentes l'application : $\begin{array}{rccl} p_{F//G}: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & x_1=p_{F//G}(x) \end{array}$ est linéaire vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $p_{F//G}^2=p_{F//G}$.
2) $\operatorname{Im} p_{F//G}=F, \ker p_{F//G}=G$ *en particulier* $\operatorname{Im} p_{F//G}$ *et* $\ker p_{F//G}$ *sont supplémentaires dans E.*

2.3 Projecteur :

Définition 9. *On appelle projecteur sur E, tout endomorphisme, p de E tel que : : $p^2=p$.*

Proposition 4. *Soit p un projecteur de E, on a les propriétés suivantes :*

1) $\operatorname{Im} p$ *et* $\ker p$ *sont supplémentaires dans E.*
2) $x\in \operatorname{Im} p \Longleftrightarrow p(x)=x$.
3) *p est la projection sur son image paraléllement à son noyau.*

Conclusion :
Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image paraléllement à son noyau.

2.4 Symétries.

Définition 10. *On appelle symétrie sur E, tout endomorphisme, s de E tel que : : $s^2=id_E$.*

Proposition 5. *Soit s une symétrie de E, on a les propriétés suivantes :*

1) $p=\frac{1}{2}(s+id_E)$ *est un projecteur.*
2) *En posant $F=\operatorname{Im} p$ et $G=\ker p$, on a $E=F\oplus G$ avec $s(x)=\begin{cases} x & \forall x\in F \\ -x & \forall x\in G\end{cases}$, on dit alors que s est la symétrie par rapport à F parallélement à G.*
3) *Inversement tout projecteur p permet de définir la symétrie $s=2p-id_E$ sur $\operatorname{Im} p$ parallélement à $\ker p$.*

3 Familles génératrices, libres, liées et bases

3.1 Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

Vocabulaire.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev , les éléments de E s'appellent des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Définition 11. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev , $x \in E, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dira que x est une combiniason linéaires de x_k si et seulement si*
$\exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}) \in \mathbb{K}^n$ *tel que :* $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Proposition 6. .

1) *L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est un sous espace vectoriel de E, qu'on appelle usuellement sous espace vectoriel engendré par les $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ et qu'on note $Vect((x_k)_{1\leq k\leq n})$. On démontre que c'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant la famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$.*
Par convention on écrit : $Vect(\emptyset) = \{0_E\}$.
2) *Si on pose : $\mathcal{B}_1 = (x_k)_{1\leq k\leq n}, \mathcal{B}_2 = (y_k)_{1\leq k\leq m}$, alors $Vect(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = Vect(\mathcal{B}_1) + Vect(\mathcal{B}_2)$.*
3) *Si $u : E \to F$ est linéaire, et $\mathcal{B} = ((x_k)_{1\leq k\leq n})$ famille de vecteurs de E, et $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ alors : $u\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$, en particulier $u\,(\mathrm{Vect}(\mathcal{B})) = \mathrm{Vect}\,(u(\mathcal{B}))$.*

3.2 Familles géneratrices

Définition 12. *Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrice de E si et seulement si tout élément de E s'écrit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, Autrement dit $Vect(\mathcal{B}) = E$.*
Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrice de E, il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Proposition 7. *Soit $u : E \to F$ linéaire.*

1) $u\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$*, en particulier deux applications linéaires égales sur une famille génératrice sont égales sur l'espace vectoriel tout entier.*
2) *Si $\mathcal{B}$ famille génératrice de E, alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$, en particulier si u est surjective alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.*
3) *Si F et G sont deux sous espace vectoriel de E, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux familles génératrices de F et G respectivement , alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une famille génératrice de $F + G$.*

3.3 Familles liée

Définition 13. *Une famille est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.*

Proposition 8. .

1) *Toute famille contenant un élément nul est liée.*
2) *Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.*
3) *Tout famille contenant une famille liée est aussi liée.*
4) *L'image par une application linéaire d'une famille liée est aussi liée.*

3.4 Familles libre

Définition 14. *Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres. En particulier* $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ *est libre si et seulement si* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$*. Et on peut surtout en conclure que si deux combinisons linéaires d'une famille libre sont égales alors leurs coefficients sont égaux.*

Proposition 9. .

1) *Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.*

2) *Une famille formée par deux élémentx est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.*

3) *Tout famille contenue dans une famille libre est aussi libre.*

4) *L'image par une application linéaire injective d'une famille libre est aussi libre.*

5) *Si* F *et* G *sont deux sous espace vectoriel de* E *tel que :* $F \cap G = \{0_E\}$, $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux familles libres dans* F *et* G *respectivement, alors* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *est libre dans* $F \oplus G$.

3.5 Bases

Définition 15. *On appelle base toute famille à la fois libre et génératrice.*

Proposition 10. .

1) *Si* $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ *est une base de* E*, alors* $\forall x \in E \quad \exists!(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ *tel que :* $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$*, les coefficients* $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ *s'appellent coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$.

2) *L'image par un isomorphisme d'une base de l'espace de départ est une base de l'espace d'arrivée.*

3) *Deux applications linéaires égales sur une base sont égales sur l'espace vectoriel tout entier.*

4) *Si* F *et* G *sont deux sous espace vectoriel de* E *tel que :* $F \cap G = \{0_E\}$, $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux bases de* F *et* G *respectivement , alors* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *est une base de* $F \oplus G$.

Fin.