Résumé de cours : *Fonctions réelles.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُوَ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

1 Vocabulaire.

Dans tout le résumé de cours I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

1.1 Partie positive et pseudo-positive d'une fonctions réelle.

Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2, \forall x \in I$, on pose : $\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x))$.
Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, on pose : $f^+ = \sup(f, 0), f^- = \sup(-f, 0)$. On a alors : $f^+ \geq 0, f^- \geq 0$ avec $f^+ + f^- = |f|, f^+ - f^- = f$.

1.2 Borne supérieure d'une fonction réelle.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on dit que f est majorée sur I ***si et seulement si*** $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M \quad \forall x \in I$, M s'appelle un majorant de f sur I, le plus petit parmi ces majorants existe on l'appelle la borne supérieure de f sur I et on le note $\sup\limits_I f$. Si de plus cette borne supérieure est atteinte en un point $x_0 \in I$ on l'appelle alors maximum de f sur I et on la note alors par $\max\limits_I f$

Propriété caractéristique de la borne supérieure.
Si f est majnorée sur I et $l \in \mathbb{R}$ alors :

$$l = \sup_I f \iff \begin{array}{l} f(x) \leq l \quad \forall x \in I \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in I \text{ tel que } l - \varepsilon < f(x) \end{array}$$

Remarque.
Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, majorées sur I alors $f + g$ est aussi majorée sur I avec :

$$\sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g$$

1.3 Borne inférieure d'une fonction réelle.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on dit que f est minorée sur I ssit $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m \quad \forall x \in I$, m s'appelle un minorant de f sur I, le plus grand parmi ces minorants existe on l'appelle la borne inférieure de f sur I et on le note $\inf\limits_I f$. Si de plus cette borne inférieure est atteinte en un point $x_0 \in I$ on l'appelle alors minimum de f sur I et on la note alors par $\min\limits_I f$.

Propriété caractéristique de la borne inférieure.
Si f est minorée sur I et $l \in \mathbb{R}$ alors :

$$l = \inf_I f \iff \begin{array}{l} f(x) \geq l \quad \forall x \in I \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in I \text{ tel que } l + \varepsilon > f(x) \end{array}$$

Remarques.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, f minorée sur $I \iff -f$ majorée sur I et dans ce cas on a : $\sup\limits_I(-f) = -\inf\limits_I(f)$.

- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, f majorée sur $I \Longleftrightarrow -f$ minorée sur I et dans ce cas on a : $\inf\limits_I(-f) = -\sup\limits_I(f)$.
- Soit $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, minorées sur I alors $f+g$ est aussi minorée sur I avec : $\inf\limits_I(f+g) \geq \inf\limits_I f + \inf\limits_I g$.

1.4 Fonctions réelles monotones.

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

On dit que f est croissante sur I *si et seulement si* :
$\forall\,(x,y) \in I^2 \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.

On dit que f est decroissante sur I *si et seulement si :*
$\forall\,(x,y) \in I^2 \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.

On dit que f est monotone sur I *si et seulement si :* elle croissante ou décroissante sur I.

Propriétés.

- La somme de deux fonctions croissantes *(resp. decroissantes)* est croissante *(resp. decroissante)*. Mais on ne peut rien dire ni de leurs différence ni de leut produit.
- La composée de deux fonctions monotones de même monotonie *(resp. de monotonies différentes)* est croissante *(resp. decroissante)*.

1.5 Fonctions réelles strictement monotones.

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

On dit que f est strictement croissante sur I *si et seulement si*
$\forall\,(x,y) \in I^2 \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.

On dit que f est strictement decroissante sur I *si et seulement si*
$\forall\,(x,y) \in I^2 \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.

On dit que f est strictement monotone sur I *si et seulement si* elle strictement croissante ou bien strictement décroissante sur I.

Remarque utile.

Toute fonction strictement monotone est injective, en particulier si $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ strictement croissante sur I alors :

$$\forall\,(x,y) \in I^2 \quad \begin{aligned} f(x) < f(y) &\Longrightarrow x < y \\ f(x) \leq f(y) &\Longrightarrow x \leq y \end{aligned}$$

1.6 Fonctions paires ou impaires.

On suppose que f est centré en **0** et soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on dit que f est paire *si et seulement si :* $\forall\, x \in I \quad f(-x) = f(x)$.

On suppose que f est centré en **0** et soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on dit que f est impaire *si et seulement si :* $\forall\, x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Propriétés.

- La somme de deux fonctions paires *(resp. impaire)* est paire *(resp. impaire)*.
- Le produit de deux fonctions de même parité *(resp. de parités différentes)* est paire *(resp. impaire)*.
- La composée de deux fonctions paires où de parités différentes *(resp. impaires)* est paire *(resp. impaire)*.

1.7 Fonctions réelles périodiques.

Soient $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}), T > 0$ on dit que f est T-péridioque sur I si et seulement si $\forall\, x \in$ tel que $x + T \in I$ on a : $f(x+T) = f(x)$.

Remarque.

La somme et le produit de deux fonctions périodiques sur I de même période est aussi périodique sur I.

En général si f est T-péridioque sur I et g est T'-péridioque sur I, alors :

$f+g, fg$ sont périodiques sur $I \Longleftrightarrow \dfrac{T}{T'} \in Q$.

1.8 Fonctions réelles lipschitziennes.

Soient $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}), k > 0$. On dit que f est k-lipschitzienne sur I si et seulement si : $\forall\,(x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.

Remarque.

la somme et le produit de deux fonctions lipschitziennes sur I est aussi lipschitzienne sur I.

2 Limite finie et continuité en un point.

On dit qu'un réel a est adhérant à I ***si et seulement si*** $a \in I$ ou bien a est l'une des extrémités de I.

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}), l \in \mathbb{R}$, on dit que l est la limite de f en a ***si et seulement si :*** $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I : \quad |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

On écrit alors $\lim\limits_{a} f = l$ et on dira que f est continue au point a lorsque $a \in I$ et $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

<u>Propriétés.</u>

Soit $(f,g,h) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^3$ qui admettent des limites finies en a adhérant à I, alors :

- $\lim\limits_{a}(f+g) = \lim\limits_{a} f + \lim\limits_{a} g, \quad \lim\limits_{a}(fg) = \lim\limits_{a} f \lim\limits_{a} g$.
  En particulier la somme et le produit de deux fonctions continues en un point le sont aussi.
- $\lim\limits_{a} |f| = |\lim\limits_{a} f|$.
  En particulier la valeur absolue d'une fonction continue en un point est aussi continue.
- Si $\lim\limits_{a} f \neq 0$ alors $\lim\limits_{a} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\lim\limits_{a} f}$.
  En particulier le quotient d'une fonction continue en un point où elle ne s'annule pas est aussi continue.
- Si $\lim\limits_{a} f > 0$ alors $f > 0$ sur un voisinage de a de la forme $]a-\eta, a+\eta[$.
  En particulier si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors f garde un signe constant, celui de $f(a)$, sur un voisinage de a de la forme $]a-\eta, a+\eta[$.
- Si $g \leq f \leq f \leq h$ sur un voisinage de a de la forme $]a-\eta, a+\eta[$ et si $\lim\limits_{a} g = \lim\limits_{a} h = l$, alors $\lim\limits_{a} f = a$.

3 Limite infinie et à l'infini.

- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{a} f = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0 \quad \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) > A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{a} f = -\infty \Longleftrightarrow \forall A < 0 \quad \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) < A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{+\infty} f = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0$ tel que $\forall x \in I \quad x > B \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{-\infty} f = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B < 0$ tel que $\forall x \in I \quad x < B \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0 \quad \exists B > 0$ tel que $\forall x \in I \quad x > B \Longrightarrow f(x) > A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0 \quad \exists B > 0$ tel que $\forall x \in I \quad x > B \Longrightarrow f(x) < A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0 \quad \exists B < 0$ tel que $\forall x \in I \quad x < B \Longrightarrow f(x) > A$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on écrit $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty \Longleftrightarrow \forall A < 0 \quad \exists B < 0$ tel que $\forall x \in I \quad x < B \Longrightarrow f(x) < A$.

4 Fonctions continues sur un intervalle.

On dit qu'une fonction est continue sur I ***si et seulement si*** elle est continue en tout point de I. L'ensembles des fonctions continues sur I se note $\mathcal{C}(I)$.

<u>Remarque.</u>

La somme et le produit de deux fonctions continues sur I sont aussi continues sur I.

<u>Théorème 1.</u>

L'image d'un intervalle par une fonction continue est aussi un intervalle.

<u>conséquences.</u>

- Si f continue sur I et g continue sur $f(I)$ alors gof est continue sur I.
- Si f continue sur I, $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ et y une valeur intémediaire stricte entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(c) = y$, ce résultat porte le nom du ***théorème des valeurs intérmediaires*** (TVI)
- Si f continue sur I, $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$, ce résultat qui est un cas particulier du TVI est trés utilisé pour justifier l'existence des solutions d'une équation de type $f(x) = 0$.

5 Dérivation.

5.1 Dérivées successives.

Définition.

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a ***si et seulement si :*** la limite suivante $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie on la note par $f'(a)$ et on l'appelle dérivée de f au point a.

Définition.

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a alors : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Propriétés.

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ dérivables en $a \in I$, on a les propriétés suivantes :

- f est continue en a et la courbe de f admet une tangente en a d'équation $\Delta : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- Si f admet un extremum en a et si a est un point intérieur de I alors $f'(a) = 0$.
- $f + g$ est dérivable en a avec $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- fg est dérivable en a avec $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. En particulier $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en a, à condition que $f'(a) \neq 0$ avec $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}$.

  En particulier $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors gof est dérivable en a avec $(gof)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

  En particulier si f est dérivable on a les résultats suivants :

  $$(f^n)' = nf'f^{n-1}, \quad \left(e^f\right)' = f'e^f, \quad (\ln f)' = \frac{f'}{\ln f}.$$
- Si f est bijective et dérivable en a, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ avec $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

5.2 Dérivées successives.

On dit que f est dérivable sur I si elle est en tout point de I, dans ce cas on peut parler de f' comme fonction définie sur I, si elle est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^1(I)$, il est stable par la somme, le produit et la multiplication par une constante, on dit que c'est une algébre. De façon récurrente on dira que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ***si et seulement si*** sa dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I, avec la relation $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' = (f')^{(k)}$. L'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^k(I)$, c'est aussi une algébre.

5.3 Théorèmes fondamentaux :

<u>**Théorème 1 :**</u> Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f(a) = f(b)$ alors :

$$\exists c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0 \quad \text{(Théorème de Rolle)}$$

<u>**Théorème 2 :**</u> Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors :

$\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ (Théorème des accroissements

http://www.chez.com/myismail
myismail1@menara.ma

Conséquence 1 : Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $m \leq f' \leq M$ alors

$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ **(Inégalité des accroissements finis I.A.F)**

Conséquence 2 : Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $|f'| \leq k$ alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.
Conséquence 3 : Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f' = 0$ alors f est constante sur $[a,b]$.
Conséquence 4 : Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f' \geq 0$ alors f est croissante sur $[a,b]$.
Conséquence 5 : Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f' > 0$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

6 Relations de comparaison :

Soit $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$ ne s'annulant jamais sur I et a adhérant à I. Noter bien que a peut être $+$i et dans ce cas ses voisinages sont de la forme $]A,+$i$[$ ou bien peut être $-$i et dans ce cas ses voisinages sont de la forme $]-$i$,$A$[$.

6.1 Dominance.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a ***si et seulement si*** $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a, on écrit alors $f = O_a(g)$.

6.2 Négligence.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a ***si et seulement si*** $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$, on écrit alors $f = o_a(g)$.

6.3 Equivalence.

On dit que f est équivalent à g au voisinage de a ***si et seulement si*** $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1$, on écrit alors $f \sim_a g$.

Propriétés.

1) $f_1 \sim_a g_1, \quad f_2 \sim_a g_2 \Longrightarrow f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2, \quad \dfrac{f_1}{f_2} \sim_a \dfrac{g_1}{g_2}$.
2) $h = o(g) \Longrightarrow g + h \sim_a g$.
3) $f \sim_a g \Longrightarrow f$ et g ont même signe au voisinage de a.
4) Si $\lim\limits_{x \to a} f = l$ (finie non nulle), alors $f \sim_a l$.

6.4 Comparaisons usuelles.

Au voisinage de $+\infty$: $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta), \quad x^\beta = o(e^{\gamma x})$.
Au voisinage de 0 : $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$ si $\beta > 0$
$x^\beta = o((\ln x)^\alpha)$ si $\beta < 0$

$\boxed{\textbf{Fin.}}$