

Feuille d'exercices N°13

Mercredi le: 11-décembre-2002

Fonctions convexes

1. Montrer que : $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
2. Soit f de classe C^1 convexe et positive sur \mathbb{R} ayant une dérivée positive sur \mathbb{R} étudier les limites en ∞ de $f(x), f'(x), xf'(x)$
3. Soit f de classe C^2 convexe sur \mathbb{R} , on suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$
 - a. montrer alors que f est affine sur $[a, b]$, (c-a-d : $f(x) = ax + \beta$)
 - b. reprendre la même question en supposant cette fois f seulement continue convexe
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b)$ et f de classe C^2 convexe sur $[a, b]$ qui admet un minimum en a
 - a. montrer alors que f est croissante.
 - b. reprendre la même question en supposant cette fois f seulement continue convexe
5. Soit f de classe C^2 convexe sur \mathbb{R} , on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$, montrer que f admet un minimum global en a
6. *Méthode de Newton* (DS 2000-2001)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b)$ et f de classe C^2 convexe sur $[a, b]$.

- a. montrer que si l'équation $f(x) = 0$ admet au moins 3 solutions alors f est nulle entre ses solutions.
 - b. on suppose dans la suite que $f' > 0$ sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$ montrer alors que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution que l'on notera l .
 - c. on pose $x_0 = b, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ montrer que le point $M(x_{n+1}, 0)$ est l'intersection de l'axe (ox) avec la tangente à la courbe de f au point $N(x_n, f(x_n))$.
 - d. Montrer que (x_n) décroissante vers l
7. *Inégalité arithmético - géométrique*

En utilisant la convexité de $f : x \rightarrow -\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \text{ on a : } \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}{n}$$

8. *Inégalités de Holder et Minkowski*

- a. En utilisant la convexité de $f : x \rightarrow -\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+2}, \forall (p, q) \in \mathbb{R}^{+*2}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a : $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ (1).
- b. soient : $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, (y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, (p, q) \in \mathbb{R}^{+*2}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ en utilisant (1) pour $a_i = \frac{x_i^p}{n}, b_i = \frac{y_i^q}{n}$ montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{Inégalité de Minkowski})$$

- c. énoncer l'inégalité de *Cauchy-schwartz* pour $p = q = 2$
- d. soient : $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, (y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, p \in \mathbb{R}^{+*}$ en déduire de (2) l'inégalité suivante dite de *Holder*

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$