Série 14 : *Fractions rationnelles*

Vendredi le 05 Mars 2004

Exercice 1:

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X) = \frac{1}{X^2(X^2-1)^2(X^2+1)^2}$ *.On pourra utiliser la parité pour réduire les calculs .*
2. $F(x) = \frac{1}{(X^3-1)^2}$ *.On pourra remarquer que :* $F(x) = F(jX) = F(j^2X)$.
3. $\frac{X^2-X+1}{X^2(1-X)^2}$ *.On pourra remarquer que :* $F(1-X) = F(X)$.
4. $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-k)^2}$; où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2:

1. Simplifier les expressions : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(X+k)(X+k+1)(X+k+2)}, \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(X+2^k)(X+2^{k+1})} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2}$.
2. Calculer la dérivée n^{eme} de l'expression : $\frac{1-t\cos(a)}{1-2t\cos(a)+t^2}$.
3. Ecrire sous forme irréductible la fraction rationnelle suivante : $\frac{(X^6+X^3-2)(X^3-2X-8)}{(X^3-1)(X^4+4)}$.
4. Donner une primitive de : $\frac{t^3}{(t^2-1)^2}$

Exercice 3:

Déterminer les réels p, q pour que les résidus de $\frac{X^2+pX+q}{(X^2-1)^2}$ aux pôles 1 et -1 soient nuls.

Rappel : *Le résidu d'un pôle a est le coefficient de* $\frac{1}{X-a}$ *dans la partie polaire relative à ce pôle .*

Exercice 4:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral montrer qu'on obtient un $DL_n(a)$ de la forme :
   $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + O((x-a)^{n+1})$.
2. Soit $F(X) = \frac{X^2+1}{(X^2+X+1)(X^3-1)^3}$ .Donner un $DL_2(1)$ de $(X-1)^3F(X)$ de la forme précédente .
3. Justifier comment on obtient ainsi la partie polaire de $F(X)$ relative au pôle 1 .

FIN