MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N$^\circ$18

Jeudi le:29-Janvier-2003

Fractions Rationnelles

1. Décomposer en éléments simples dans $IR(X)$ les fractions rationnelles suivantes : $\frac{1}{X^2(X^2-1)^2(X^2+1)^2}$, $\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$

2. On pose : $F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^3}$

- **a**. Determiner la partie polaire de F relative a 1.
- **b**. En utilisant l'égalité $F(X) = F(jX) = F(j^2X)$, décomposer F en éléments simples dans $C(X)$.

3. décomposer en élément simple sur $IR(X)$ la fraction F=$\frac{X^2-X+1}{X^4(1-X)^4}$, on pourra remarquer que $F(1-X) = F(X)$

4. Simplifier les expressions : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(X+k)(X+k+1)(X+k+2)}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(X+2k)(X+2^{k+1})}$

5. Calculer la dérivée n^{eme} de l'expression : $\frac{1-Xcos(a)}{1-2Xcos(a)+X^2}$

6. Ecrire sous forme irréductible la fraction rationnelle suivante : $\frac{(X^{5n}+X^{2n}-2)(X^3-2X-8)}{(X^3-1)(X^4+4)}$

7. Donner une primitive de : $\frac{t^3}{(t^2+t+1)^2}$

8. Soit F=$\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $C(X)$ où P,Q sont deux polynômes premiers entre eux et soit $a \in C$.

- **a**. On suppose que a est un pole double de F , montrer que la partie polaire relative à a s'écrit : $\frac{\alpha}{(X-a)^2} + \frac{\beta}{X-a}$ avec: $\alpha = \frac{2P(a)}{Q''(a)}, \beta = \frac{2}{3}\frac{3P'(a)Q''(a)-P(a)Q'''(a)}{Q''(a)^2}$
- **b**. Application : Décomposer en éléments simples $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-k)^2}$ où $n \in IN*$

9. Déterminer les réels p,q pour que les résidus de $\frac{X^2+pX+q}{(X^2-1)^2}$ aux pôles1 et -1 soient nuls.

10. Décomposer en éléments simples dans $IR(X)$ les fractions rationnelles suivantes : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$, : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2}$