MPSI 1
CPGE AGADIR

Feuilles d'exercices N°2

Denombrement
Mercredi le:18 Septembre 2002

Exercice 1:

Montrer que : $\forall n \in IN \ \forall k \in [|0,n|]$ **on a** : $C_{2n}^{k} \leq C_{2n}^{n}$ **En déduire que** : $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq C_{2n}^{n} \leq 2^{2n}$

Exercice 2:

Montrer par récurrence descendante que : $\forall (p,m) \in INxIN$ **tel que** $p \leq m$ **on a** : $\sum_{n=p}^{m} C_n^p = C_{m+1}^{p+1}$

Exercice 3:

Montrer par récurrence double que : $\forall (n,m) \in IN^* x IN^*$: $\frac{(mn)!}{m!n!} \in IN$

Exercice 4:

Montrer par récurrence sur $n \in IN$ **que** : $\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^3$

Exercice 5:

On pose pour tout $n \in IN$ $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ **montrer que** : $\forall n \geq 2 \ \exists p_n$ **pair et** $\exists q_n$ **impair tels que** : $\gamma_n \notin IN$

Exercice 6:

On dispose de 3 points A , B **et** C **et de 4 chemins différents menant de** A **vers** B **et 4**

autres de B vers C.De combien de façons on peut aller de A vers C en passant par B

Exercice 7:

soit $n \in IN^*$ dénombrer tous les carrés dont les sommets sont a coordonnes entières ,dont les cotes sont verticales et horizontales et dont
la longueur ne dépasse pas n. exprimer le résultat trouve en fonction de n

Exercice 8:

soit $n \in IN^*$, de combien de façon on peut faire asseoir n hommes et n femmes numérotes autour d'une table ronde dont les $2n$ sièges sont
non numérote en respectant l'alternance homme-femme .Reprendre la meme question dans les autres cas possibles où on numerote ou pas
les hommes , les femmes les sieges

Exercice 9:

soit $n \in IN^*$ et $0 \leq p \leq n$. E un ensemble de cardinal n et A une partie de E de cardinal p. Combien y a t-il de parties de E qui
contiennent A.

Exercice 10:

soit $n \in IN^*$.Sur un ensemble fini de cardinal n combien on peut définir de :
1. relations binaires.
2. relations binaires réflexives.(on pourra
utiliser l'Exo 4)

Exercice 12:

soit $(n,p) \in IN^* x IN^*$. Combien y a t-il d'applications strictement croissantes de $[|1,n|]$ vers $[|1,n+p|]$

Exercice 13:

1.Quel est le coefficient de $x^6y^4z^3$dans le développement de$(x+2y-3z)^{15}$
2.Calculer $S_n = 1x2x3 + 2x3x4 + +n(n+1)(n+2)$

Exercice 14:

En calculant de deux façons $((1+x)^n)^3$, démontrer que $C_{3n}^n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-p} C_n^p C_n^k C_n^{n-p-k}$

Exercice 15:

Montrer $\forall (n,p) \in IN^2$ $\sum_{k=0}^{p} kC_n^{p-k}C_n^k = C_{2n-1}^{p-1}$ En déduire $\sum_{k=0}^{p} k(C_n^k)^2$ Indication : on pourra utiliser et sa dérivée $(1+x)^n$ et sa derivee

Exercice 16:

soit n$\in$ IN on note par P_n (respectivement I_n) l'ensemble des entiers pairs (respectivement impairs) inferieurs a n , calculer les sommes suivantes: $\sum_{k\in I_n} k$, $\sum_{k\in P_n} k$, $\sum_{k\in I_n} k^2$, $\sum_{k\in P_n} k^2$..

Exercice 17:

en developpant ou bien derivant $(1+x)^n$ calculer les sommes suivantes: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$.

Exercice 18:

soit E ensemble non vide et A partie de E fixe on definit l'application suivante :

$$f : P(E) \to P(A)xP\left(\overline{A}\right)$$

$$X \to \left(X \cap A, X \cap \overline{A}\right)$$

1.montrer que f est bijective en deduire que : $\forall (n,m,p) \in IN^3 \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^{p-k} = C_{n+m}^p$

2.en deduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$ en fonction de n.

www.chez.com/myismail©