Série 23 : *Géometrie euclidienne*

Mercredi 16 Juin 2004

Exercice 1:

DS(2000-2001) : Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire du plan non colinéaire avec $\overrightarrow{i}$, p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et q celle sur $\mathbb{R}\overrightarrow{i}$

1. Montrer que : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$ on a $p(\overrightarrow{x}) =< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u} > \overrightarrow{u}, q(\overrightarrow{x}) =< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{i} > \overrightarrow{i}$
2. On pose $s = p + q - 2poq$ montrer que s est une similitude d'origine O de rapport $sin(\theta)$ et d'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ où $\theta = \widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}}$.
   (*indication* : penser à l'écriture complexe)

Exercice 2:

DS(2000-2001) Soit ξ espace affine euclidien de dimension $p = 2$ ou $p = 3$, soit $n \in \mathbb{N}, (A_i)_{1\leq i\leq n}$ famille de points de ξ deux à deux distincts et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ familles de réels.Pour tout point $M \in \xi$ on pose $\varphi(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2$ (fonction scalaire de *Leibniz*). Pour tout point $M \in \xi$ on pose $\vec{f}(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i}$ (fonction vectorielle de *Leibniz*)

1. Reconnaître l'application affine $g : M \to M'\overrightarrow{OM'} = \vec{f}(M)$ (distinguer les cas $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$)
2. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ et on pose $G = Bar(A_i(a_i)_{1\leq i\leq n})$ montrer que : $\varphi(M) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) MG^2 + \varphi(G)$
3. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ montrer que : $\varphi(M) = \varphi(O) + < 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{u} >$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur fixe à déterminer.
4. Reconnaître l'ensemble $\{M \in \xi / \varphi(M) = \lambda\}$ où λ réel donné (distinguer les cas ${}^{n}_{i=1}a_i = 0$ et ${}^{n}_{i=1}a_i \neq 0$)
5. On suppose dans la suite que $p = 2$ et $n = 3$ les point sont non alignés et M point du plan.
   (a) Montrer que M s'écrit de façon unique sous la forme $M = Bar(A_i(a_i)_{1\leq i\leq n})$ où a_i réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$
   (b) Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i\right)\vec{f}(M) = a_2a_3\,(A_2A_3)^2 + a_1a_3\,(A_1A_3)^2 + a_2a_1\,(A_2A_1)^2$, (on pourra utiliser (b)).

(c) En déduire que M appartient au cercle circonscrit du triangle $(A_1A_2A_3)$ ssi : $a_2a_3\,(A_2A_3)^2 + a_1a_3\,(A_1A_3)^2 + a_2a_1\,(A_2A_1)^2 = 0$ *(équation barycentrique du cercle)*

(d) Donner l'équation cartésienne du cercle circonscrit du triangle $(A_1A_2A_3)$ si $A_1 = (1,1), A_2 = (-1,2) et A_3 = (1,0)$

Exercice 3:

Reconnaître les applications affines d'expression analytique dans le repère canonique :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \end{array}\right. . \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \end{array}\right.$$

Exercice 4:

Perpendiculaire commune de deux droites.1ere méthode

1. Soient D_1 et D_2 deux droites de $\mathbb{R}^3$ passant par A_1 et A_2 et dirigées par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ respectivement. Montrer que la droite D dirigée par : $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ passant par $H_1 \in D_1$ tel que : $\overrightarrow{A_1H_1} = \frac{\langle A_1A_2.\langle \overrightarrow{u_1} - \langle \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\rangle.\overrightarrow{u_2}\rangle\rangle}{1-\langle \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\rangle^2}\,\overrightarrow{u_1}$ est perpendiculaire commune à D_1 et D_2.
2. *Application numérique :* Soient D_1 et D_2 les droites de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives :

$$D_1 : \left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right. . D_2 : \left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right.$$

Donner la droite de leur perpendiculaire commune puis en deduire $d(D_1, D_2)$.

Exercice 5:

*Perpendiculaire commune de deux droites. 2éme méthode*Soient D_1 et D_2 les droites de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives

$$D_1 : \left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right. ; D_2 : \left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right.$$

1. Donner $\overrightarrow{u}$ un vecteur orthogonal à la fois a D_1 et D_2.
2. Donner l'équation du plan π_1 contenant D_1 tel que $\overrightarrow{u}//\pi_1$.
3. Donner l'équation du plan π_2 contenant D_2 tel que $\overrightarrow{u}//\pi_2$.
4. Vérifier que la droite $D = \pi_1 \cap \pi_2$ est perpendiculaire commune à D_1 et D_2.
5. En déduire $d(D_1, D_2)$.
6. Vérifier ce résultat a l'aide de la méthode de l'exercice précédent.

Exercice 6:

Reconnaître les transformations définies par leurs expressions analytiques dans le repère canonique :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = z - 2 \\ y' = x \\ z' = y \end{array}\right. \quad ; \left\{\begin{array}{l} x' = y - 2 \\ y' = z + 1 \\ z' = x + 1 \end{array}\right. .$$

Exercice 7:

Trouver le réel a pour que

$$D_1 \left\{\begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y = z + 2 \end{array}\right. \text{ et } D_2 \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{array}\right.$$

soient coplanaires, donner l'équation du plan les contenant

Exercice 8:

Contrôle 10 (2001-2002) :

1. Reconnaître l'équipotentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{u}$ où A, B deux points et $\overrightarrow{u}$ vecteur de $\mathbb{R}^3$ fixes.
2. *Application numérique* : $A\,(1, 2, -1)\,, B\,(1, 0, 1)\,, \overrightarrow{u}\,(2, -1, 2)$

Exercice 9:

*Contrôle 10 (2001-2002) :*Soit D_1 la droite passant par $A(0, 1, 1)$ et $B(1, 0, 1)$ et D_2 celle d'équations

$$D_2 \left\{\begin{array}{l} x + 2y + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{array}\right.$$

1. Donner l'équation cartésienne de D_1.
2. Donner l'équation cartésienne de D perpendiculaire commune de D_1 et D_2.
3. En déduire $d(D_1, D_2)$.

Exercice 10:

*Contrôle 10 (2001-2002) :*Déterminer l'angle entre $\overrightarrow{u}$(1,2,1) et $\overrightarrow{v}$(2,1,-1).

Exercice 11:

*Contrôle 10 (2001-2002) :*Donner l'écriture complexe de la similitude qui transforme $A(1, 1)$ en $B(-3, -3)$ et $A'(2, 1)$ en $B'(2, -1)$, en déduire l'image de $M(1, 2)$ par cette transformation.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc