MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Feuille d'exercices N$^\circ 24$

Mardi le:22-Avril-2003

Fonctions a deux variables

1. Déterminer les extremums des fonctions suivantes :
   - **a**. $f : (x,y) \to 2x + y - x^4 - y^4$
   - **b**. $g : (x,y) \to xe^y + ye^x$
   - **c**. $h : (x,y) \to \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

   Préciser leurs natures (minimums , maximums, locaux , globaux)
2. Soit (ABC) un triangle du plan , déterminer les points du plan où les fonctions suivantes atteignent leurs extremums :
   - **a**. $f : M \to MA^2 + MB^2 + MC^2$
   - **b**. $g : M \to MA + MB + MC$
   - **c**. $h :: M \to MAMBMC$

   Préciser leurs natures (minimums , maximums)
3. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - **a**. $\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)f + x^2 + y^2 = 0$ (passer aux coordonnées polaires).
   - **b**. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (passer aux coordonnées polaires).
   - **c**. $2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, x = \frac{u^2+v^2}{2}, y = \frac{u}{v}$.
   - **d**. $2(y^2 - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (y^2 - x) = 0; x = u^2 + v^2, y = u + v$.
4. Calculer les intégrales doubles suivants:
   - **a**. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$où $\left\{D = (x,y) \in IR^2/0 \leq x \leq 1 - \frac{y^2}{4}\right\}$
   - **b**. $\iint_D x^2ydxdy$ où $D = \{(x,y) \in IR^2/0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$
5. Calculer les intégrales triples suivants:
   - **a**. $\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$ où D est le tétraèdre de sommets $A(2,1,0); B(2,-1,0); C(0,0,3), D(0,0,-3)$
   - **b**. $\iiint_D z^2ydxdydz$où $D = \{(x,y,z) \in IR^3/0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
6. Etudier la limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes :
7. $f(x,y) = \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2}$.
8. $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
9. La fonction suivante definie par : $f(x,y) = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est -elle de classe C^1.
10. Pour $x > 0$ on pose $g(x) = ln(x) + 2x + 1$.
    - **a**. montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $a \in]0, \frac{1}{e}[$.
    - **b**. sur $IR^{+*}xIR$ on pose $f(x,y) = x(ln(x) + x + y^2)$ déterminer le point critique.
    - **c**. vérifier que f admet un minimum relatif en ce point et que $\min f = -a(a+1)$.
11. Soit λ>1, on pose $H = \{(x,y) \in IR2/x > 0\}$ et $D = \{(x,y) \in IR^2/x > 0, y \neq 0\}$, on se propose d'étudier les extremums de la fonction $f(x,y) = x^\lambda y - y^2 - yln(x+1) + 1$.
    - **a**. pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^\lambda - ln(x+1)$, montrer que l'équation$f'(x) = 0$ admet une

seule solution $b\in]0,+\infty[$.

b. on pose $f(b)=2c$, montrer que $c<0$.

c. montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution $a\in]0,+\infty[$ et que $a>b$.

d. déterminer les points critiques de f(on les exprimera en fonction de a,b,c).b. montrer que$f$admet un seul extremum , que l'on précisera.

12. On pose $D=\{(x,y)\in IR^2, x>0, y>0\}, r=\sqrt{x^2+y^2}, t=\frac{y}{x}, f(x,y)=g(r,t)$, on admet que si $f$est de classe C^2 sur D alors g l'est aussi; et on pose $Tf(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, et pour tout $a\in IR$ on pose $N_a=\{f\in C^2(D)/Tf-af=0\}$.

a. montrer que D est un ouvert.

b. si $(f,h)\in C^2(D)xC^2(D)$ exprimer $T(fh)$ en fonction de f,h,Tf,Th.

c. si $(f,\varphi)\in C^2(D)xC^2(IR)$, donner l'expression de $T(\varphi of)$.

d. exprimer Tf en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial t}, r, t$.

e. calculer Tt.

f. montrer que si $\varphi\in C^2(IR^{+*})$ alors $\varphi ot\in N_0$.

g. en déduire la forme générale des fonctions $f\in N_0$.

h. calculer Tr.

i. montrer que $f\in N_0 \Leftrightarrow rf\in N_1$, en déduire la forme générale des fonctions $f\in N_1$.

j. pour $a\in IR$, calculer $t(r^a)$, en déduire la forme générale des fonctions $f\in N_a$.

k. on se propose dans la suite de résoudre l'équation : (*) $Tf-af=bh$ où $h\in N_b$, on suppose d'abord que : $a=b$, montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0=\varphi(r)h$ où $\varphi\in C2(IR^{+*})$ que l'on explicitera ; en déduire la forme générale des solutions de (*).

l. on suppose maintenant que : $a\neq b$, montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0=\lambda h$ où λ est une constante que l'on explicitera ; en déduire la forme générale des solutions de (*).

m. résoudre les équations suivants :

i. $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-f(x,y)=\frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy}$.

ii. $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-2f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$.