Série 5 : Structures algébriques élémentaires

Mercredi le 22 Octobre 2003

Exercice 1:

Soit E un ensemble non vide. On définit sur $P(E)$ la LCI suivante à ; $A * B = A \cup \overline{B}$.

1. Est-elle : associative ; commutative ?
2. admet-elle : un élément neutre ; des éléments inversibles ; des éléments réguliers ?

Justifiez vos réponses .

DS 2001-2002

Exercice 2:

Soit $(E, .)$ un magma tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E : x.x = x \\ \forall (x, y, z) \in E^3 : (x.y).z = (y.z).x \end{array} \right.$$

Montrer que $.$ est commutative .

Exercice 3:

Soit E ensemble fini non vide muni d'une LCI associative et commutative , dont tous les éléments sont réguliers , montrer que c'est un groupe .

même question on supposant cette fois que la LCI est seulement associative .

Indication : On pourra étudier l'injection de la fonction : $\varphi_a : E \longrightarrow E$ où $a \in E$ fixé pour $x \longmapsto a.x$ justifier l'existence de l'élément neutre et des éléments inversibles .

Exercice 4:

Soit E un ensemble fini non vide muni d'une LCI associative et commutative vérifiant la propriété suivante : $\forall (x, y) \in E^2 ; \exists a \in E$ tel que : $y = a.x$. Montrer que c'est un groupe .

Même question on supposant cette fois que la LCI est seulement associative .

Indication : On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 5:

Soit $(E, .)$ un magma , pour toute partie A de E on pose : $c(A) = \{x \in E / a.x = x.a, \forall a \in A\}$ qu'on appelle *centre* de A . Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall A \in P(E)$ on a : $A \subset c(c(A))$.
2. $\forall (A, B) \in P(E)^2 : A \subset B \implies c(B) \subset c(A)$.
3. $\forall A \in P(E) : c(A) = c(c(c(A)))$.

4. $(E, \cdot)$ groupe $\implies (c(E), \cdot)$ groupe .

Exercice 6:

Soit $(G, \cdot)$ un groupe , $(a, b, c) \in G^3$ fixes et e neutre pour $\cdot$; montrer les résultats suivants :

1. $(a^5 = b^4 = e, ab = ba^3) \implies (a^2b = ba, ab^3 = b^3a^2)$
2. $(b^6 = e, ab = b^4a) \implies (b^3 = e, ab = ba)$
3. $(a^5 = e, aba^{-1} = b^2) \implies b^{31} = e$
4. $(ab)^{-1} = a^{-1}b$ et $(ba)^{-1} = b^{-1}a \implies (a^2 = b^2, a^2b^2 = e)$
5. $(a^{-1}ba = b^{-1}, b^{-1}ab = a^{-1}) \implies a^4 = b^4 = e$
6. $((aba) = b^3, b^5 = e) \implies (ab = ba, a^2 = b^2)$

Rappel : dans un groupe $(G, \cdot)$ pour $x \in G, n \in \mathbb{Z}$ on pose $x^n = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}}, & \text{si } n > 0 \\ e & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \dots \cdot x^{-1}}_{|n| \text{ fois}}, & \text{si } n < 0 \end{cases}$

Exercice 7:

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on définit la LCI suivante : $(a, b) * (c, d) = (ac, \frac{d}{a} + bc)$
montrer que ça définit une structure de groupe, s'agit-il d'un groupe abélien ?

Exercice 8:

Soit G un groupe , pour tout $a \in G$, pour toutes parties H et K de G on pose :

- aH l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $a \cdot x$ où $x \in H$
- Ha l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $x \cdot a$ où $x \in H$
- HK l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $x \cdot y$ où $(x, y) \in H \times K$

1. Soit $a \in G$ et H sous groupe de G montrer que : aH sous groupe de $G \iff a \in H$
2. Soit $a \in G$ et H sous groupe de G montrer que Ha sous groupe de $G \iff a \in H$
3. soient H et K deux sous groupes de G montrer que HK sous groupe de $G \iff HK = KH$

Exercice 9:

Soit $(G, +)$ un groupe abélien .

1. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \forall s \in \mathbb{Z}, \forall (x, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in G^{m+2}$ on a :

$$\sum_{i=n}^{n+m} (sx_i + x) = s \left(\sum_{i=n}^{n+m} x_i \right) + (m+1)x$$

2. En déduire que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ on a : $\sum_{i=n}^{n+m} (2i+1) = (m+1)(2n+m+1)$
3. En déduire que : $\forall m \in \mathbb{N} : m^2$ est la somme des m premiers nombres impairs :

"Théorème de THEON DE SMYRNE, mathématicien grec"

Exercice 10:

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif $\forall (x, n) \in A \times \mathbb{N}^*$ on pose :

$$x^{(0)} = 1_A, x^{(1)} = x, x^{(2)} = x(x - 1_A), \dots, x^{(n)} = x(x - 1_A)(x - (n - 1)1_A)$$

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in A \times A \text{ on a : } (x + y)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{(n-k)} y^{(k)}.$$

Rappel : Dans un anneau A pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n1_A = \underbrace{1_A + 1_A + \dots + 1_A}_n$ fois

Exercice 11:

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif on dit qu'un élément $x \in A$ est nilpotent si : $\exists n \in \mathbb{N}^* : x^n = 0_A$. Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents sont aussi nilpotents.

Indication : On pourra montrer que $x^n = y^m = 0_A \implies xy^{n+m} = (x + y)^{n+m} = 0_A$.

Exercice 12:

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que $x^2 = x, \forall x \in A$. Montrer alors que : $\forall x \in A; 2x = 0_A$, en déduire ensuite que A est commutatif.

Indication : on pourra développer $(x + y)^2$

Exercice 13:

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels est muni de deux lois notées $+$ et $*$ définies de la façon suivante :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad ; \quad (a, b) * (a', b') = (aa', ab' + ba').$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif. Quel est son élément unité ?
2. Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ? Lorsque l'élément (a, b) est inversible, quelle est l'expression de son inverse $(a, b)^{-1}$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$(a, b)^n = \underbrace{(a, b) * (a, b) * \dots * (a, b)}_n \text{ fois}$$

Donner une expression simple de $(a, b)^n$.

FIN

© : www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc