

Série 6 : Arithmétique

Mercredi le 12 Novembre 2003

Exercice 1:

Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : (9 \text{ divise } a^3 + b^3 + c^3) \Rightarrow (3 \text{ divise } a \text{ ou } b \text{ ou } c)$
 2. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : (7 \text{ divise } a^3 + b^3 + c^3) \Rightarrow (7 \text{ divise } abc)$
 3. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : 6 divise $5n^3 + n$
 4. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : 9 divise $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$
-

Exercice 2:

Nombres de Fermat (mathématicien français : 1601–1665) .Les nombres de *Fermat* sont ceux de la forme : $F_n = 2^{2^n} + 1$

1. montrer que tous ces nombres sont premiers entre eux deux a deux
2. montrer que F_n est premier pour $n \in [0, 4]$ mais F_5 ne l'est pas
3. soit $a \in \mathbb{N}^*$ montrer que si $2^a + 1$ est premier alors a est une puissance de 2

A l'heure actuelle on ne connaît aucun nombre de *Fermat* premier autre que ceux de (2) mais on connaît plusieurs qui ne le sont pas : F_{1945} (qui a plus de 10582 chiffres) est divisible par $2^{1947}5 + 1$ (qui a exactement 587 chiffres)

Exercice 3:

1. Montrer que si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est solution de l'équation : $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ avec $p \wedge q = 1$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^{n+1}$ alors : p divise a_0 et q divise a_n critère d'Eseinstein
 2. résoudre l'équation : $30X^3 - 37X^2 + 15X - 2$
-

Exercice 4:

Donner le chiffres des unités de 4444^{4444} .On pourra travailler dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercice 5:

On pose $N = 4444^{4444}$, A la somme des chiffres de N , B celle de A et C celle de B , trouver C .(On pourra utiliser après l'avoir justifié qu'un nombre et la somme de ses chiffres sont toujours *congrus modulo 3* et 9)

Exercice 6:

Soit $N = 111111111$, écrit en base 10 , démontrer que : $N^2 = 12345678987654321$

Exercice 7:

1. Nous sommes le mercredi 12 – 11 – 2003 , l'année prochaine quel jour sera le 12 – 11 – 2004 ?
 2. Dans quelle année le 12 – 11 sera un mercredi ?
-

Exercice 8:

1. Montrer que tout entier supérieur a 2 non premier admet au moins un diviseur premier inférieur a sa racine.
 2. Enoncer le *crible d'Erathostène* qui permet de tester si un nombre est premier.
 3. Les nombres premiers suivants sont - ils premiers : 353 , 91451
-

Exercice 9:

Montrer que si p est premier alors : $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ *Théorème de Wilson*

On pourra utiliser le fait que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tout élément est inversible et ainsi multiplier tous ces éléments entre eux

Exercice 10:

Résoudre le système suivant d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ divise } n \\ n \text{ admet } 10 \text{ diviseurs dans } \mathbb{N} \\ \text{il existe un nombre premier } p \text{ tel que } n = 37p + 1 \end{array} \right.$$

Exercice 11:

Trouver tous les chiffres x et y qui vérifient : $\overline{28x75y}^{10}$ est divisible par 3 et par 11.

Exercice 12:

Soit p un nombre premier. Montrer que $p/C_p^k \forall k \in [1, p - 1]$. *Utiliser Gauss*

Exercice 13:

Soit p un nombre premier. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : n^p \equiv n \pmod{p}$ (*Petit Théorème de Fermat*)

Exercice 14:

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ montrer que $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow ab \wedge (a + b) = 1$.

Exercice 15:

Resoudre dans \mathbb{N}^* le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq y \\ x \vee y = (x \wedge y)^2 \\ x \vee y + x \wedge y = 156 \end{array} \right.$$

Exercice 16:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $x = 3n + 1, y = 5n - 1$.

1. Montrer que $x \wedge y$ divise 8.
 2. Trouver les entiers n tels que $x \wedge y = 8$.
-

Exercice 17:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 2^n divise $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$

Exercice 18:

Soient $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $m \geq n$. On pose $m = qn + r$ avec $0 \leq r < n$

1. montrer que : $\exists b \in \mathbb{N}; a^m - 1 = (a^n - 1)b + a^r - 1$.
 2. Montrer que : $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{m \wedge n} - 1$.
 3. Montrer que : $(a^n - 1) \text{ divise } (a^m - 1) \iff n \text{ divise } m$
-

Exercice 19:

Soit N_k le nombre qui s'écrit avec k chiffres 1 en base 10, montrer que : $N_h/N_k \iff h/k$

Exercice 20:

Nombres de Mersenne : ils sont de la forme : $M_p = 2^p - 1$ avec p premier.

1. Montrer que les *Nombres de Mersenne* sont premiers entre eux deux à deux
 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que : $a^b - 1$ est premier, montrer alors que : $a = 2$ et b premier
-

Exercice 21:

Pour tout entier n on note par $D(n)$ l'ensemble de ses diviseurs dans \mathbb{N} et $\varphi(n) = \sum_{d/n} d$

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$

1. Montrer que si $n \wedge m = 1$ alors chaque diviseur de nm s'écrit sous la forme dd' où d divise n et d' divise m
2. En déduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow D(nm) = D(n) \times D(m)$
3. En déduire que : $n \wedge m = 1 \Rightarrow \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

Contrôle 2 (2001-2002)

Exercice 22:

On rappelle que si $n \geq 2$ et p premier $v_p(n)$ désigne la puissance de p dans la décomposition de n en produits de facteurs premiers

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N} \ p^i \text{ divise } n \implies i \leq v_p(n)$
2. Montrer que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \ p^{i+j} \leq n \implies E\left(\frac{1}{p^j} E\left(\frac{n}{p^i}\right)\right) = E\left(\frac{n}{p^{i+j}}\right)$
3. On pose $m = E\left(\frac{n}{p}\right)$, montrer que : $v_p(n!) = m + v_p(m!)$
4. *Applications* :
 - (a) Calculer $v_7(10000!)$
 - (b) Decompose $16!$ en produits de facteurs premiers.
 - (c) Montrer qu'en base 10, $1000!$ se termine par 249 zeros.

DS 2 (99-2000)

Exercice 23:

Préambule :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on note par $\varphi(n)$ la somme des diviseurs de n dans \mathbb{N}
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que n est parfait ssi $\varphi(n) = 2n$.
- On appelle *Nombre d'Euclide* tout entier naturel de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ tel que p et $2^p - 1$ sont premiers.

1. Montrer que si $n \wedge m = 1$ alors chaque diviseur de nm s'écrit sous la forme dd' où d divise n et d' divise m
2. En déduire que : $n \wedge m = 1 \implies \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$
3. Soit $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ un *Nombre d'Euclide*. Trouver tous les diviseurs de E_p .
4. En déduire que les *Nombres d'Euclide* sont tous parfaits
5. Soit N un nombre parfait pair.
 - (a) Montrer que : $\exists m \in \mathbb{N} \ \exists q \text{ impair tel que } : N = 2^m q$
 - (b) Montrer que $\exists r \in \mathbb{N}^* \ / \ q = (2^{m+1} - 1)r, \varphi(q) = 2^{m+1}r$. On pourra utiliser (2).
 - (c) Montrer que $r=1$. On pourra utiliser le fait que N est parfait.
 - (d) Montrer que $p, 2^p - 1$ sont premiers où $p=m+1$
 - (e) Conclure
6. (*) Soit N un nombre parfait impair ≥ 3 . Montrer que N admet au moins 3 diviseurs premiers et en déduire que $N \geq 105$

A l'heure actuelle on ne sait pas s'ils existent des nombres parfaits impairs

DS 2 : 98-99

FIN

© : www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc