Série 7 : *Structures algébriques élémentaires*

Mercredi 10 Novembre 2004

Exercice 1:

Soit E un ensemble non vide .On définit sur *P(E)* la *LCI* suivante ă ; $A * B = A \cup \overline{B}$.

1. Est -elle : associative ; commutative ?
2. admet - elle : un élément neutre ; des éléments inversibles ; des éléments réguliers ?

Justifiez vos réponses .

Exercice 2:

Soit $(E, .)$ un magma tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in E : x.x = x \\ \forall (x, y, z) \in E^3 : (x.y).z = (y.z).x \end{cases}$$

Montrer que . est commutative .

Exercice 3:

Soit E ensemble fini non vide muni d'une LCI associative et commutative , dont tous les éléments sont réguliers , montrer que c'est un groupe .

même question on supposant cette fois que la LCI est seulement associative .

<u>*Indication :*</u>*On pourra étudier l'injection de la fonction :* $\begin{array}{l} \varphi_a : E \longrightarrow E \\ x \longmapsto a.x \end{array}$ *où* $a \in E$ *fixé pour justifier l'existence de l'élément neutre et des éléments inversibles .*

Exercice 4:

Soit E un ensemble fini non vide muni d'une LCIassociative et commutative vérifiant la propriété suivante :$\forall (x, y) \in E^2 ; \exists a \in E$ tel que : $y = a.x$ .Montrer que c'est un groupe .

Même question on supposant cette fois que la LCI est seulement associative .

<u>*Indication :*</u>*On pourra utiliser l'exercice précédent.*

Exercice 5:

Soit $(E, .)$ un magma , pour toute partie A de E on pose : $c(A) = \{x \in E / a.x = x.a, \forall a \in A\}$ qu'on appelle *centre* de A.Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall A \in P(E)$ on a : $A \subset c(c(A))$.
2. $\forall (A, B) \in P(E)^2 : A \subset B \Longrightarrow c(B) \subset c(A)$.
3. $\forall A \in P(E) : c(A) = c(c(c(A)))$.
4. $(E, .)$ groupe $\Longrightarrow (c(E), .)$ groupe .

Exercice 6:

Soit $(G,.)$ un groupe , $(a,b,c) \in G^3$ fixes et e neutre pour .; montrer les résultats suivants :

1. $\left(a^5 = b^4 = e, ab = ba^3\right) \Longrightarrow \left(a^2b = ba, ab^3 = b^3a^2\right)$
2. $\left(b^6 = e, ab = b^4a\right) \Longrightarrow \left(b^3 = e, ab = ba\right)$
3. $\left(a^5 = e, aba^{-1} = b^2\right) \Longrightarrow b^{31} = e$
4. $(ab)^{-1} = a^{-1}b$ **et** $(ba)^{-1} = b^{-1}a \Longrightarrow \left(a^2 = b^2, a^2b^2 = e\right)$
5. $\left(a^{-1}ba = b^{-1}, b^{-1}ab = a^{-1}\right) \Longrightarrow a^4 = b^4 = e$
6. $\left((aba) = b^3, b^5 = e\right) \Longrightarrow \left(ab = ba, a^2 = b^2\right)$

Rappel : *dans un groupe (G,.) pour :* $x \in G, n \in \mathbb{Z}$ *on pose* $x^n = \begin{cases} \underbrace{x.x.....x}_{n fois}, & si \quad n > 0 \\ e \quad si \quad n = 0 \\ \underbrace{x^{-1}.x^{-1}.....x^{-1}}_{|n| fois}, & si \quad n < 0 \end{cases}$

Exercice 7:

Sur $\mathbb{R}^*$ x $\mathbb{R}$ on définit la LCI suivante :$(a,b) * (c,d) = (ac, \frac{d}{a} + bc)$

montrer que ça définit une structure de groupe,s'agit-il d'un groupe abelien ?

Exercice 8:

Soit G un groupe , pour tout $a \in G$, pour toutes parties H et K de G on pose :

- aH l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $a.x$ où $x \in H$
- Ha l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $x.a$ où x $\in H$
- HK l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $x.y$ où $(x,y) \in HxK$

1. Soit $a \in G$ et H sous groupe de G montrer que : aH sous groupe de $G \Longleftrightarrow \quad a \in H$
2. Soit $a \in G$ et H sous groupe de G montrer que Ha sous groupe de $G \Longleftrightarrow \quad a \in H$
3. soient H et K deux sous groupes de G montrer que HK sous groupe de $G \Longleftrightarrow HK = KH$

Exercice 9:

Soit $(G,+)$ un groupe abélien .

1. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \forall s \in \mathbb{Z}, \forall (x, x_n, x_{n+1},, x_{n+m}) \in G^{m+2}$ on a :
$$\sum_{i=n}^{n+m} (sx_i + x) = s\left(\sum_{i=n}^{n+m} x_i\right) + (m+1)x$$
2. En déduire que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ on a : $\sum_{i=n}^{n+m} (2i+1) = (m+1)(2n+m+1)$
3. En déduire que : $\forall m \in \mathbb{N}$: m^2 est la somme des m premiers nombres impairs :

"Théorème de THEON DE SMYRNE, mathématicien grec"

Exercice 10:

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif $\forall(x,n)\in A$ x $\mathbb{N}^*$ on pose :

$$f_0(x)=1_A, f_1(x)=x, f_2(x)=x(x-1_A)..., f_n(x)=x(x-1_A)\dots(x-(n-1)1_A)$$

Montrer que :

$$\forall(x,y)\in A\mathrm{x}A \text{ on a :} f_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f_{n-k}x f_k(y).$$

<u>Rappel :</u> Dans un anneau A pour $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $n1_A=\underbrace{1_A+1_A+...+1_A}_{n\quad fois}$

Exercice 11:

Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif on dit qu'un élément $x\in A$ est nilpotent si : $\exists n\in\mathbb{N}^*$: $x^n=0_A$.Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents sont aussi nilpotents.

<u>Indication :</u>On pourra montrer que $x^n=y^m=0_A\Longrightarrow xy^{n+m}=(x+y)^{n+m}=0_A$.

Exercice 12:

Soit $(A,+,.)$ un anneau tel que $x^2=x,\forall x\in A$. Montrer alors que : $\forall x\in A;2x=0_A$,en déduire ensuite que A est commutatif .

<u>Indication :</u> on pourra développer $(x+y)^2$

Exercice 13:

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels est muni de deux lois notées $+$ et $*$définies de la façon suivante :

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b') \quad ; \qquad (a,b)*(a',b')=(aa',ab'+ba') .$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2,+,*)$ est un anneau commutatif. Quel est son élément unité ?
2. Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ? Lorsque l'élément (a,b) est inversible, quelle est l'expression de son inverse $(a,b)^{-1}$?
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On note

$$(a,b)^n=\underbrace{(a,b)*(a,b)*\cdots*(a,b)}_{n\quad fois}$$

Donner une expression simple de $(a,b)^n$.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca