Série 8 : *Fonctions Réelles*

Mercredi le 10 Décembre 2003

Exercice 1:

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y
2. $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous réels x, y
3. $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous réels x, y
4. $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y

Exercice 2:

Etudier la monotonie sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction réelle :$f : x \to xE(\frac{1}{x}) - 1$.

Exercice 3:

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.$f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a.Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$.

Exercice 4:

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \wp^n(I)$. Montrer que :$\forall x \in \mathbb{R}$ / $\frac{1}{x} \in I$ on a :

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. *Application :* calculer la dérivée n^{eme} des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = x^{n-1} ln(1+x), h(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 5:

Montrer que toutes les dérivées de $x \to \frac{1}{cos(x)}$ sont positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 6:

1. soit $f : [a,b] \to [a,b]$ croissante continue montrer que f admet un point fixe.
2. reprendre la même question en supposant cette fois f seulement croissante .*indication* : Penser à $sup(A)$ où $A = \{x \in [a,b] \quad / \quad f(x) \geq x\}$.
3. a-t-on le même résultat si f est décroissante .

Exercice 7:

On pose $f(x) = x^2(2 + sin(\frac{1}{x^2}))$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ montrer que f admet un minimum strict en 0 mais f n'est croissante sur aucun intervalle de la forme $[0, a]$.

Exercice 8:

On pose $f(x) = \frac{x}{1+xsin(\frac{1}{x})}$ si $0 < x \leq 1$ et $f(0) = 0$ montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ strictement croissante mais que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions .

Exercice 9:

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\wp^1$ telle que $f'(x) \neq 0; \forall x \in [a, b]$ montrer que strictement monotone.

Exercice 10:

soit $f : [a, b] \to IR$ dérivable telle que $f(0) = 0$ on pose $S_n(f) = \sum\limits_{k=n}^{2n} f(\frac{1}{k})$

1. montrer que la suite $x_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ est convergente soit L sa limite , on ne cherchera pas a la calculer .
2. montrer que $S_n(f)$ converge vers un réel S qu'on exprimera en fonction de $L, f'(0)$.
   (*indication :* on pourra utiliser la définition de f dérivable en 0).
3. en prenant $f(x) = ln(1 + x)$ expliciter S puis en déduire L .

Exercice 11:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Calculer la dérivé n^{me} de la fonction $f_n(x) = x^n ln(x)$.

Exercice 12:

TAF à l'infini : Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet la même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ montrer que f' admet au moins un zéro.

Exercice 13:

TVI à l'infini : Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet deux limites de signes opposés en $-\infty$ et en $+\infty$ montrer que f admet au moins un zéro.

Exercice 14:

Théorème des accroissement finis généralises :Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues dérivables sur $]a, b[$ tel que $|f'(x)| \leq |g'(x)|, \forall x \in]a, b[$ montrer alors que $|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|$

Exercice 15:

Problème d'emballage : Une usine fabrique des boites parallelipediques sans couvercle de la façon suivante : on prend une feuille rectangulaire de carton de cotes a et b puis on découpe de chaque coin un carre de cote x puis on rabat les morceau ainsi obtenues , quelle est la valeur de x qui réalise un volume maximal

---

Exercice 16:

Algorithme de Newton :

1. Soit $a > 0$,étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{x+\frac{a}{x}}{2}$
2. Justifier que la suite définie par $x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bien définie.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2}{2x_n}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{a - x_{n+1}^2}{2x_{n+1}}$.
5. En déduire que $x_n \to \sqrt{a}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
7. En déduire une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, a .
8. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-3} près (on admet que $2 < e < 2.8$).
9. Ecrire un programme en *Maple* qui affiche les 20 premiers termes de la suite x_n.
10. écrire un programme en *Maple* qui donne une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-8} près .

DS : 98-99

Exercice 17:

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2} \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Ecrire un programme *Maple* qui affiche les 20 premiers termes de la suit (u_n).
2. Calculer a l'aide d'une calculatrice la valeur de u_{10}.
3. Etudier sur $[0, 1]$ la fonction $f$définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$, En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge ,calculer sa limite.
4. Dans toute la suite on pose $v_n = 1 - u_n$
   (a) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2 - v_n}$
   (b) En déduire que $\forall n \geq 1$ on a : $\frac{1}{v_n} \geq \frac{n+3}{2}$
   (c) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $\frac{1}{2-x} \geq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$
   (d) En déduire que $\forall n \geq 1$ on a : $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3}$
   (e) En déduire que $\forall n \geq 2$ on a : $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.
   (f) En déduire que $\forall n \geq 2$ on a : $\frac{1}{v_n} \leq \frac{n+3}{2} + ln(n+2)$.
   (g) En déduire un équivalent simple de v_n puis de u_n .

Controle 99-2000

Exercice 18:

Montrer que : $x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) < x$ pour tout $x > -1$

Applications :

1. En déduire la limite de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (où $x > -1$)
2. Donner un exemple d'une suite (x_n) telle que : $x_n \to 1$ mais $x_n^n \nrightarrow 1$.
3. calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 19:

Soit $0 < r < 1, 0 < a < b$, on pose : $u_0 = a, u_1 = b, u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n$, montrer que (u_n) est croissante majorée .

Exercice 20:

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$ l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ admet une solution unique dans $]0, 1[$ que l'on notera x_n .
2. Montrer que (x_n) est monotone puis convergente .
3. Calculer sa limite .

Exercice 21:

1. soit $n \in \mathbb{N}^*, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et g de classe $\wp^n$ sur $[a, b]$ qui s'annule au moins $n + 1$ fois , montrer alors que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

   Indication : Penser au théoréme de *Rolle* . soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad a_1 < a_2 < .... < a_n$ nombres reéls deux à deux distincts et f de classe $\wp^n$ sur $[a_1, a_n]$ qui s'annule sur tous les a_i , montrer que $\forall x \in [a_1, a_n] \quad \exists c_x \in]a_1, a_n[$ tel que $f(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} (x - a_k)$,

   Indication on pourra fixer x et utiliser (1) pour la fonction $g(t) = f(t) - \prod\limits_{k=1}^{n} (t - a_k)$ avec A nombre réel choisi tel que : $g(x) = 0$.

Exercice 22:

Pour tout entier n et réel x on pose $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + . + nx^n - 1$.

1. Justifier que $f_n(x) = 0$ admet un solution unique que l'on notera x_n .
2. Calculer $f_{n+1}(x_n)$, en déduire que (x_n) est décroissante puis qu'elle converge .
3. Montrer que pour x différent de 1 on a :$f_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^{-2}} - 1$.
4. Calculer x_1, puis en déduire les limites des suites suivantes $(x_n^n), (nx_n^n), (x_n)$.

Exercice 23:

Pour $n \geq 3$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = x - nln(x)$.

1. Etudier les variations de f_n en déduire que l'é quation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n tels que : $0 < u_n < n < v_n$.

   On se propose dans la suite de chercher un équivalent simple de u_n et v_n quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $1 < u_n < e$.
3. Calculer $f_n(u_{n+1})$ en déduire que (u_n) est monotone puis qu'elle converge vers 1 .
4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$,en déduire que $u_n - 1 \tilde{} \frac{1}{n}$.
5. Calculer $lim(v_n)$.
6. Calculer $f(nln(n))$ puis montrer que $nln(n) < v_n$ pour $n \geq 3$.
7. Pour $x > 0$ on pose $g(x) = x - 2ln(x)$ étudier le signe de g en déduire que : $n > 2ln(n)$.
8. En déduire le signe de $f_n(2nln(n))$ puis établir que $nln(n) < v_n < 2nln(n)$.
9. Conclure que $v_n \backsim nln(n)$.

DS : 99-2000

Exercice 24:

On pose $x_0 = \frac{3}{2}, x_{n+1} = x_n \left(2 - \ln\left(x_n\right)\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (x_n) est bien definie.
2. Montrer que (x_n) est croissante majorée par e .
3. En deduire que (x_n) est convergente , preciser sa limite.
4. Montrer que : $\forall (x, y) \in [1, e]^2 : \left|\ln(x) - \ln(y) - \frac{y-x}{x}\right| \leq \frac{(y-x)^2}{8}$.
5. En deduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - e| \leq \frac{3}{8} |x_n - e|^2$
6. En deduire les 5 chiffres aprés la virgule de e .

DS : 2000-2001

Exercice 25:

1. Soit $f \in \wp^3$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant jamais ,calculer les 3 premiéres derivées de f .
2. Généraliser ce résultat puis démontrer le par récurrence .

Exercice 26:

1. Calculer les derivé de : $ln(ln(ln(ln(x))))$, $x^{x^{x^x}}$.
2. Calculer les derivé n^{eme} de $(1 - x^2)cos(x)$, $\frac{e^x}{x}$.

Exercice 27:

Soit $n \in \mathbb{N}^*, f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables .Calculer $(f_1 f_2)', (f_1 f_2 f_3)'$,en déduire une formule générale pour $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i$ qu'on démontrera aprés .

Exercice 28:

Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire , celle d'une fonction impaire est paire.En déduire qu'en un centre de symetrie de la courbe la dérivée seconde est nulle .

Exercice 29:

Soit f périodique sur $\mathbb{R}$ qui admet une limite fine en $+\infty$ .Montrer que f est constante .

Exercice 30:

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ croissante telle que : $f(2x) - f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ .Montrer que $\frac{f(x)}{ln(x)} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. (Indication : On pourra d'abord montrer par *Césaro* que : $\frac{f(2^n)}{n} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 31:

On se propose de déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ telles que :

$$\lim_{0} = +\infty, \lim_{+\infty} = 0, f(xf(y)) = yf(x) \quad \forall x, y > 0$$

1. Chercher une solution parmi les exemples que l'on connait .
2. Montrer que f admet au moins un point fixe a .
3. Montrer par l'absurde que a=*1* .
4. Conclure .

Exercice 32:

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(ax) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ où a nombre réel fixe différent de 1 et -1 .Montrer que f est constante *(Commencer par étudier le cas -1<a<1)* .

Exercice 33:

1. Soit α de la forme $\frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que : $f(0) = f(1)$ .Montrer que : $\exists x_0 \in [0,1]$ tel que : $f(x_0 + \alpha) = f(x_0)$.*Théoréme des cordes de Paul Levy*
   (Commencer par le cas $\alpha = \frac{1}{2}$*)* .
2. Intrpréter géometriquement ce résultat .
3. En considérant la fonction : $f_\alpha : x \longrightarrow x - \frac{sin^2(\frac{\pi x}{\alpha})}{sin^2(\frac{\pi}{\alpha})}$ vérifier que la propriété précédente est fausse si α n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$.

Exercice 34:

1. Soit $a \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ montrer qu'il existe un unique complexe b de partie relle strictement positive tel que $b^2 = a$.
2. On pose $P^+ = \left\{z \in \mathbb{C} : \Re e\left(\frac{z}{b}\right) > 0\right\}$. et $f : z \longrightarrow \frac{1}{2}(z + \frac{a}{z})$ montrer que P^+ est stable par f .
3. On pose $z_0 = a, z_{n+1} = f(z_n), w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}; \forall n \in \mathbb{N}$ .Montrer que z_n, w_n sont bien définies .

4. Exprimer w_n en fonction de w_{n-1} puis en fonction de b, n .
5. Montrer que $|w_0| < 1$,en déduire les limites de w_n, z_n .

DS : 99-2000

Exercice 35:

Soit $a \in \mathbb{R}$ Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n = e^{ia}$.

Exercice 36:

1. Soit $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{it} \end{array}$ .Montrer que f est de classe $\wp^1$ .Calculer sa fonction dérivée .
2. Montrer que f ne vérifie pas le *TAF .(Raisoner par l'absurde)*

Exercice 37:

1. Soit $a \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ montrer qu'il existe un unique complexe b de partie relle strictement positive tel que $b^2 = a$.
2. On pose $P^+ = \left\{z \in \mathbb{C} : \Re e\left(\frac{z}{b}\right) > 0\right\}$. et $f : z \longrightarrow \frac{1}{2}(z + \frac{a}{z})$ montrer que P^+ est stable par f .
3. On pose $z_0 = a, z_{n+1} = f(z_n), w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}; \forall n \in \mathbb{N}$ .Montrer que z_n, w_n sont bien définies .
4. Exprimer w_n en fonction de w_{n-1} puis en fonction de b, n .
5. Montrer que $|w_0| < 1$,en déduire les limites de w_n, z_n .

DS : 99-2000

Exercice 38:

Soit $a \in \mathbb{R}$ Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n = e^{ia}$.

Exercice 39:

1. Soit $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{it} \end{array}$ .Montrer que f est de classe $\wp^1$ .Calculer sa fonction dérivée .
2. Montrer que f ne vérifie pas le *TAF .(Raisonner par l'absurde)*

Exercice 40:

1. Donner un équivalent de $\ln(\cos x)$ au voisinage de zéro.
2. Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et que son prolongement (toujours noté f) est dérivable en ce point.
3. Préciser $f'(0)$.

FIN