Feuille d'exercices : *Espaces Vectoriels.*

Maths-PCSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Lundi 27 Mars 2006.

1) Montrer qu'un $\mathbb{C}$-ev est aussi un $\mathbb{R}$-ev. Donner un contre exemple montrant que la réciproque est fausse.

2) Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ fixé ;les ensembles suivants, sont-ils des espaces vectoriels ?

a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $ax+by+cz=0\}$.

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $ax+by+cz=d\}$.

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $ax^2+byx+cy^2=d\}$.

3) Soient F,G,H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E.
Montrer que $F\cap(G+(F\cap H))=(F\cap G)+(F\cap H)$.

4) Montrer que les familles $\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\},\{1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3}\}$ sont libres dans $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$–ev .

5) Soit $a\in\mathbb{R}$ fixé, $f_1:x\to\sin(x)$, $f_2:x\to\sin(x+a)$, $f_3:x\to\cos(x)$.
Montrer que $\{f_1,f_2,f_3\}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

6) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ montrer que les familles suivantes $(f_k)_{0\le k\le n}$ sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans chacun des cas suivants :

a) $f_k(x)=x^k$.

b) $f_k(x)=e^{kx}$.

c) $f_k(x)=\cos(kx)$.

d) $f_k(x)=\cos^k(x)$.

7) Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f,g:E\to E$ linéaires montrer que :

$$f(\operatorname{Ker} gof)=\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f$$

8) Soit $T>0$, on pose $E=\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ T–périodique $\}$.

a) Montrer que la primitive d'une fonction f, T–périodique est aussi T-périodique *si et seulement si* $\int_0^T f(x)dx=0$.

b) Soit $u:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$ montrer que :

$$E=\operatorname{Ker} u\oplus\operatorname{Im} u$$

9) Soit E ev et $f,g:E\to E$ linéaires telles que f est une bijection vérifiant : $fog=gof,\quad g^4=0$.

a) Montrer que : $(f^{-1}og)^4=0$.

b) Montrer que : $id_E-f^{-1}og$ est un isomorphisme .
Indication : on pourra utiliser l'égalité :
$$id_E-u^n=(id_E-u)\sum_{k=0}^{n-1}u^k,\forall u\in\mathcal{L}(E).$$

c) Montrer que : $f+g$ est un isomorphisme.

10) Soient E,F deux espaces vectoriels non nuls, $f:E\to F$ lineaire telle que : $\forall g\in\mathcal{L}(F,E)$; on ait $fogof\neq0$.
Montrer que f est bijective.

11) Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tel que } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$.
$G = \{P \in E \text{ tel que } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
$H = \{P \in E \text{ tel que } P(X) = P(-X)\}$

a) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tel que } P(1) = P(2) = 0\}$.

b) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

12) Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et f, g deux endomorphismes de E.
Montrer que : $gof = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

13) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

a) Montrer que : $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

b) Montrer que : $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

c) Donner une condition necessaire et suffisante sur f pour qu'on ait : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

14) a) Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$, $F = \{(a, 2a, 4a); a \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

b) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $p((x, y, z))$ la projection sur E parallélement à F et $s((x, y, z))$ la symétrie par rapport à E parallélement à F .

15) On considère p et q deux projecteurs sur un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E.

a) Montrer que : $poq = q \Longleftrightarrow \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$.

b) Montrer que :

$$p + q \text{ est un projecteur } \Longleftrightarrow poq + qop = 0, poq = 0, qop = 0$$

et que dans ce cas :

$$\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}; \quad \operatorname{Ker} p + q = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$$

c) On suppose dans cette question que : $poq = 0$. Montrer que :

i. $r = p + q - qop$ est un projecteur.

ii. $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$

iii. $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

16) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
f est une homothétie *si et seulement si* pour tout x dans E, on a $(x, f(x))$ est liée.

17) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f^2 + f = 0$, montrer que :

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} f + id_E = E$$

18) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y - z, x + y + 2z, 3x + z) \end{array}$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer le noyau et l'image de f, est-elle injective ? surjective ?

c) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur, et trouver une partie génératrice de $\operatorname{Im} f$ de cardinal 2.

19) Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finies et $u, v : E \to F$ linéaires.

a) Montrer que $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$.

b) Discuter les cas d'égalité .

20) Soient E, F deux $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimensions finies. $u, v : E \to F$ linéaires telles que : $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = E$.
Montrer que les deux sommes sont directes .

21) Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finies.
$u : E \to F$, $v : F \to E$ linéaires telles $vouov = v, uovou = u$. Montrer que : $E = \operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} u$ et $rg(u) = rg(v)$.

22) Soient E, F deux $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E, alors : $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \operatorname{Ker} f)$.

b) Montrer que si K est un sous-espace vectoriel de F, alors : $\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$.

23) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ telles que $f \circ g = 0$. Trouver une inégalité liant les rangs de f et de g.
Peut–on avoir égalité ?

24) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$.

a) Montrer que $rg(f)+rg(f^2)\leq \dim(E)$.

b) Montrer que $2rg(f^2)\leq rg(f)$.
(Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f_{|\operatorname{Im} f}$).

25) Soient $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$ tels que $f\circ g\circ f=f$ et $g\circ f\circ g=g$.

a) Montrer que $E=\operatorname{Ker} f\oplus \operatorname{Im} g$.

b) Montrer que $f(\operatorname{Im} g)=\operatorname{Im} f$.

26) a) Montrer que tout endomorphisme, f de $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme : $f(z)=az+b\overline{z}$ où $a,b\in\mathbb{C}$ des constantes à exprimer en fonction de $f(1)$ et $f(i)$.

b) Montrer que f bijectif $\Leftrightarrow |a|\neq|b|$.

27) Soit $a,b\in\mathbb{R},\ a\neq b$. On pose $P_k(X)=(X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

28) Sur $\mathbb{R}^3$ on considère les formes linéaires :

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z)&=x+2y+3z\\ f_2(\vec{x})&=2x+3y+4z\\ f_3(\vec{x})&=3x+4y+6z \end{aligned}.$$

a) Montrer que $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3)$ est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.

b) Trouver sa base duale $\mathcal{B}^*=(f_1^*,f_2^*,f_3^*)$, vérifiant

$$f_i^*(f_j)\ \begin{aligned} &=1 \text{ si } i=j\\ &=0 \text{ si } i\neq j\end{aligned}$$

29) Formule de Van der Monde.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $k\in[|0,n|]$ on pose $P_k(X)=X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Démontrer que $\mathcal{B}=(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\big(X^n(1-X)^n\big)^{(n)}$.

c) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$.

30) Opérateur des différences finies.
On note $U_p=\dfrac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}$, $p\in\mathbb{N}$, et

$$\Delta:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}[X]\\ P(X)&\longmapsto&P(X+1)-P(X)\end{array}.$$

a) Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer $\Delta^n(U_p)$.

c) En déduire que : $\forall\ P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a :
$P=P(0)+(\Delta P)(0)U_1+(\Delta^2P)(0)U_2+\cdots+(\Delta^nP)(0)U_n$.

d) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Démontrer que : $\big(\forall\ n\in\mathbb{Z}$, on a $P(n)\in\mathbb{Z}\big)\Longleftrightarrow\big($ les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières $\big)$.

e) Soit $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\ n\in\mathbb{N}$ tq $\Delta^n(f)=0$.

31) Polynômes d'interpolation de Lagrange :
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue et $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réels de $[0,1]$ deux a deux distincts , on pose $L_k(X)=\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\dfrac{X-r_i}{r_k-r_i}$

a) Calculer $L_k(r_j)$ pour $1\leq j,k\leq n$.

b) En déduire que la famille $(L_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Exprimer tout $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.

d) En déduire que $\exists! P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui interpole f aux point $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ càd $f(r_k)=P(r_k)$ pour tout $1\leq k\leq n$

32) Polynômes d'interpolation de Hermite.
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivable et $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réels de $[0,1]$ deux a deux distincts ,et $\varphi:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_{2n-1}[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}^{2n}\\ P&\longmapsto&(P(r_1),P'(r_1),..,P(r_n),P'(r_n))\end{array}.$

a) Montrer que φ est un isomorphisme.

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme qui interpole f et dont la dérivée interpole f' aussi aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$

33) Permutation de coordonnées dans $\mathbb{K}^n$.
Soit $\sigma\in S_n$ (groupe symétrique) et $f_\sigma:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{K}^n&\longrightarrow&\mathbb{K}^n\\ (x_1,\dots x_n)&\longmapsto&(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\end{array}$
on munit $\mathbb{K}^n$ de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.

a) Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.

b) Soit φ un automorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}^n$.

i. Montrer que la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est invariante par φ *(étudier $\varphi(e_i^2)$ et $\varphi((e_i+e_j)^2)$).*

ii. En déduire qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\varphi = f_\sigma$.

c) Montrer que $\{0\}$, $\mathbb{K}(1,\dots,1)$, $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_1 + \dots x_n = 0\}$ et $\mathbb{K}^n$ sont les seuls sous-espace vectoriel stables par tous les endomorphismes f_σ.

34) Commutants itérés :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour $v \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, et on note $C_i = \operatorname{Ker} \varphi^i$, ainsi $C_0 = 0$, C_1 est le commutant de u, C_2 est l'ensemble des v tels que $v \circ u - u \circ v$ commute avec u,...).

a) Calculer $\varphi(v \circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.

b) Montrer que $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ appelée *Commutant* de $\mathcal{L}(E)$.

35) Barycentre de projections :
Soient p, q deux projections de même base H et de directions F,G. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est encore une projection de base H.

On rappelle que la base d'un projecteur est son image, et sa direction est son noyau.

36) Relation d'ordre sur les projecteurs :
On munit l'ensemble des projections d'un espace vectoriel E de la relation binaire suivante :

$$p \ll q \iff p \circ q = q \circ p = p$$

a) Montrer que c'est une relation d'ordre.

b) Soient p, q deux projections permutables. Montrer que $\sup(p,q) = p + q - p \circ q$ et $\inf(p,q) = p \circ q$.

37) Éléments algébriques : Soient $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ deux corps avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$.
Un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est dit algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

a) Montrer que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\mathbb{K}[\alpha] = Vect(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

b) On suppose que α et β sont algébriques sur $\mathbb{K}$. Montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur $\mathbb{K}$ (étudier $\mathbb{K}[\alpha, \beta]$).

$\boxed{\text{Fin.}}$