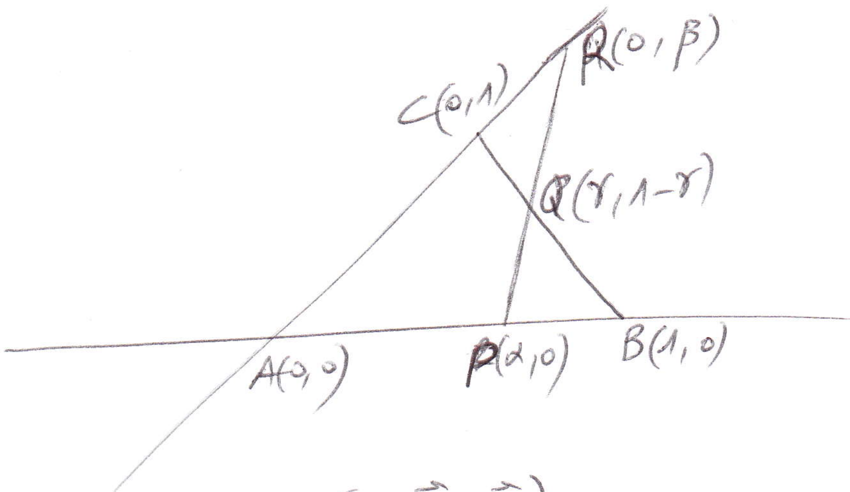
MPSI - RABAT

Mr Mamouni

Correction TD

Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

Ex 4



dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$

- la droite (AB) a pour eq $y=0$, posons $\boxed{P(\alpha,0)}$
- la droite (AC) a pour eq $x=0$, posons $\boxed{R(0,\beta)}$
- On a $B(1,0)$ et $C(0,1)$ donc BC a pour eq $x+y=1$

  posons $\boxed{Q(\gamma, 1-\gamma)}$

- On a $\vec{AR} = \beta \vec{AC}$ donc $\overline{AR} = \beta\, \overline{AC}$

  et $\vec{CR} = \vec{CA} + \vec{AR} = (\beta-1)\vec{AC}$ donc $\overline{CR} = (\beta-1)\,\overline{AC}$

donc $$\boxed{\frac{\overline{AR}}{\overline{CR}} = \frac{\beta}{\beta-1}}$$

- $\vec{AP} = \alpha \vec{AB}$ donc $\overline{AP} = \alpha \overline{AB}$

  et $\vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP} = (\alpha - 1)\vec{AB}$ donc $\overline{BP} = (\alpha-1)\overline{AB}$

  donc $\boxed{\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}}$

- $\vec{AQ} = \gamma \vec{AB} + (1-\gamma)\vec{AC}$

  $= \gamma \vec{AB} + (1-\gamma)\vec{AB} + (1-\gamma)\vec{BC}$

  donc $\vec{AB} + \vec{BQ} = \gamma\vec{AB} + (1-\gamma)\vec{AB} + (1-\gamma)\vec{BC}$ donc $\overline{BQ} = (1-\gamma)\overline{BC}$

  donc ~~AB~~ $\vec{BQ} = (1-\gamma)\vec{BC}$

  $= \gamma\vec{AC} + \gamma\vec{CB} + (1-\gamma)\vec{AC}$

  et $\vec{AC} + \vec{CQ} = \gamma\vec{AC} + \gamma\vec{CB} + (1-\gamma)\vec{AC}$ donc $\overline{CQ} = \gamma\overline{CB}$

  donc ~~AR~~ $\vec{CQ} = \gamma\vec{CB}$

  donc $\boxed{\dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \dfrac{1-\gamma}{-\gamma}}$

- Ainsi $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \dfrac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \dfrac{1-\gamma}{-\gamma} \cdot \dfrac{\beta-1}{\beta} = 1$

  $\Leftrightarrow \alpha(1-\gamma)(\beta-1) = -\gamma\beta(\alpha-1)$

  $\Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha - \alpha\gamma\beta + \alpha\gamma = -\gamma\beta\alpha + \gamma\beta$

  $\Leftrightarrow \boxed{\alpha\beta - \alpha + \alpha\gamma - \gamma\beta = 0}$ (1)

- D'autre part P, Q, R alignés $\Leftrightarrow \vec{PQ} = \lambda \vec{PR}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$

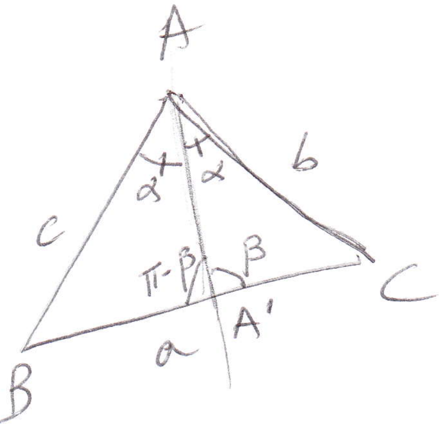
  $\Leftrightarrow \det(\vec{PQ}, \vec{PR}) = 0$

  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \gamma-\alpha & -\alpha \\ 1-\gamma & \beta \end{vmatrix} = 0$

  $\Leftrightarrow \boxed{\gamma\beta - \alpha\beta + \alpha - \alpha\gamma = 0}$ (2)

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

Ex 6



1) La loi des sinus appliquée au triangle (AA'B)

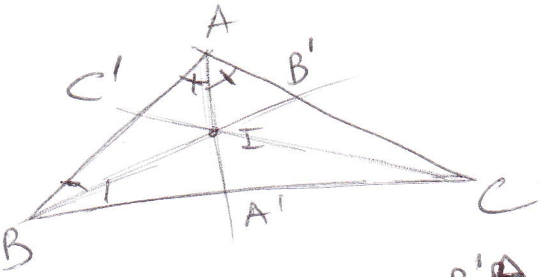
donne $\dfrac{\sin\alpha}{A'B} = \dfrac{\sin(\pi-\beta)}{AB} = \dfrac{\sin\beta}{AB}$ ①

appliquée sur (AA'C), elle donne

$$\frac{\sin\alpha}{A'C} = \frac{\sin\beta}{AC} \quad ②$$

$\dfrac{②}{①} \Rightarrow \dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

2) Posons $I = Bar(A(x), B(y), C(z))$ tq $x+y+z=1$ avec x, y, z positif car I à l'intérieur du triangle



de même on montre que $\dfrac{B'A}{B'C} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{c}{a}$

et $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{b}{a}$

$I = xA + yB + zC$

donc $\vec{A'I} = x\vec{A'A} + y\vec{A'B} + z\vec{A'C}$

donc $\vec{A'I} - x\vec{A'A} = y\vec{A'B} + z\vec{A'C}$ donc les deux vecteurs sont nuls

or $\begin{cases} \vec{A'I} - x\vec{A'A} \parallel \vec{AA'} \\ y\vec{A'B} + z\vec{A'C} \parallel \vec{BC} \end{cases}$

d'où $y\vec{A'B} + z\vec{A'C} = \vec{0}$

donc $\cancel{y/z = A'B}$ $\boxed{y/z = \dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{b}{c}}$

Avec un raisonnement pareil, on montre que

$\frac{z}{x} = \frac{c}{a}$ et $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

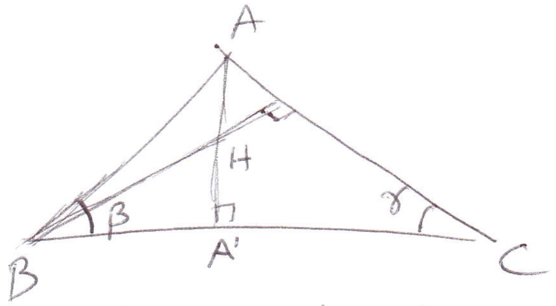
d'où le système $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ \frac{y}{z} = \frac{b}{c} \\ \frac{z}{x} = \frac{c}{a} \end{cases}$

$x=a$, $y=b$, $z=c$ est une solution particulière

Comme les coordonnés barycentrique sont uniques à une cte multiplicative près

on a $\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda a \\ y = \lambda b \\ z = \lambda c \end{array}}$

Ex 7



1) Ne sont pas //

2) Soit H l'intersection des hauteurs issues des sommets A et B donc $\begin{cases} \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 & ① \\ \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 & ② \end{cases}$

mq $H \in$ la 3^e hauteur càd $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$ ③

② $\Leftrightarrow (\vec{AC} + \vec{CH}) \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BC} + \vec{CH} \cdot \vec{BC} = 0$ ①

① $\Leftrightarrow (\vec{BC} + \vec{CH}) \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{CH} \cdot \vec{AC} = 0$ ②

② − ① ⇒ ③

3) $\tan\beta = \frac{A'A}{A'B}$ et $\tan\gamma = \frac{A'A}{A'C}$ d'où $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$

4) Comme dans l'exo 6 si $H = xA + yB + zC$

on trouve $\begin{cases} x = \lambda \tan\alpha \\ y = \lambda \tan\beta \\ z = \lambda \tan\gamma \end{cases}$