Feuille d'exercices : *Groupes Cycliques.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلُهُ وَ المُؤ مِنُون
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Exercice 1. Soit G un groupe et a, b deux éléments fixes de G, d'ordre finis tel que $ab = ba$ et $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$.
Montrer que ab est d'ordre fini avec $o(ab) = o(a) \vee o(b)$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini et a un élément de G d'ordre fini et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que a^n est d'ordre fini avec, $o(a^n) = \dfrac{o(a)}{o(a) \wedge n}$.

Exercice 3. Soit G un groupe monogène engendré par un élément a, et H un sous-groupe de G.

1) Montrer que l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (G, .) \\ n & \longmapsto & a^n \end{array}$ est un morphisme de groupe.
2) En déduire que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^{-1}(H) = p\mathbb{Z}$.
3) En déduire que H est engendré par a^p.

Conclusion : Tout sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 4. Soit G un groupe abélien, fini de cardinal n, et a un élément de G.

1) Montrer que l'application $\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a.x \end{array}$ est bijective, en déduire que $\varphi_a(G) = G$
2) En faisant le produit des éléments de G et ceux de $\varphi_a(G)$, montrer que $a^n = e$.
3) En déduire que $o(a)$ divise n.

Exercice 5. Soit G un groupe non réduit à son élément neutre, dont les seuls sous-groupe sont l'élément neutre et lui même. Montrer que G est monogène, puis fini et que son cardinal est premier.

Exercice 6. Soit G_1 et G_2 deux groupes, on muni leur produit cartesien $G_1 \times G_2$ de sa structres de groupe canonique, en posant
$(a, b).(c, d) = (a.c, b.d)$. On suppose de plus qu'il sont cycliques.

1) Soit $(a, b) \in G_1 \times G_2$, montrer que $o(a, b) = o(a) \vee o(b)$.
2) En déduire que :
   $G_1 \times G_2$ est cyclique ***si et seulement si*** $\mathrm{card}(G_1) \wedge \mathrm{card}(G_2) = 1$.

Exercice 7. Soit G un groupe et a, b deux éléments fixes de G.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (ab)^{n+1} = a(ba)^n b$.
2) En déduire que ab est d'ordre fini ***si et seulement si*** ba est d'ordre fini avec $o(ab) = o(ba)$.

Exercice 8. Soit G un groupe et a, b deux éléments fixes de G.

1) Montrer que a d'ordre fini ***si et seulement si*** a^{-1} est d'ordre fini avec $o(a^{-1}) = o(a)$.
2) Montrer que b d'ordre fini ***si et seulement si*** aba^{-1} est d'ordre fini avec $o(aba^{-1}) = o(b)$.

Exercice 9. .

1) Montrer que l'ensemble $G = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $z^{2^n} = 1$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ infini non monogène.
2) Montrer que tout sous-groupe fini du groupe G est cyclique.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $d = k \wedge n$.

1) Déterminer l'ordre de $\dot{k}$ dans G.
2) Montrer que $\dot{k}$ et $\dot{d}$ engendrent le même sous-groupe de G.
3) Quels sont tous les sous-groupes de G ?

Exercice 11. Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupe et $a \in G_1$, d'ordre fini.
Montrer que $f(a)$ est d'ordre fini avec $o(f(a))$ divise $o(a)$ avec égalité si f est bijective.

Exercice 12. Théorème du rang.
Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes où G est un groupe fini. Montrer que card$(\mathrm{Ker} f) \times$ card$(\mathrm{Im} f) =$ card(G).

Exercice 13. Décomposition d'un élément d'ordre fini.
Soit G un groupe multiplicatif et $a \in G$ d'ordre np avec $n \wedge p = 1$.
Montrer qu'il existe $b, c \in G$ uniques tels que b est d'ordre n, c est d'ordre p, $a = bc = cb$.
Indication : utiliser la formule de Bézout.

Exercice 14. Groupe d'ordre pair.
Soit G un groupe fini de cardinal pair.

1) Montrer que l'ensemble des x tel que $x^2 \neq e$ est de cardinal pair.
2) Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre 2.

Exercice 15. Groupe d'ordre impair.
Soit G un groupe fini de cardinal impair.
Montrer que : $\forall\ x \in G,\ \exists!\ y \in G$ tel que $x = y^2$.

Exercice 16. Groupe d'exposant 2.
Soit G un groupe fini tel que : $\forall\ x \in G,\ x^2 = e$.

1) Montrer que G est commutatif (considérer $(xy)(xy)$).
2) Soit H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous groupe engendré par $H \cup \{x\}$. Montrer que card$K = 2$card$H$.
3) En déduire que card$G$ est une puissance de 2.

Exercice 17. Caractérisation des sous groupes d'un groupe cyclique.
Soit G un groupe cyclique d'ordre n,a un générateur de G, et $G_d = \{x \in G$ tel que $x^d = 1\}$.

1) **Soit $(c, d) \in \mathbb{N}^2$ tel que $cd = n$, montrer que $G_d =< a^c >$ et card $G_d = d$**
2) **Soit H un sous groupe de G**
   a) **Justifier l'existence d'un plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^p \in H$.**
   b) **Montrer que $p \leq n$ et que $H =< a^p >= G_q$ où $pq = n$.**
   c) **Déduire une bijection entre les sous groupes de G et les diviseurs de n.**
3) **Application :**
   a) **Soit $k \in \mathbb{Z}$, déterminer en fonction de $n \wedge k$ le couple (p, q) réalisant :$pq = n$ et $< a^k >=< a^p >= G_q$.**
   b) **Soit H un sous groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$ montrer que : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = U_n$.**

Exercice 18. Théorème de Lagrange.
Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On définit une relation sur G par : $\forall\, x, y \in G,\ x \sim y \Longleftrightarrow \exists\, h \in H$ tel que $x = hy$.

1) **Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.**
2) **Soit $a \in G$. Quelle est la classe de a ?**
3) **Soit $a \in G$. Montrer que $\dot{a}$ est équipotent à H.**
4) **En déduire que card$H$ divise card$G$ (*Théorème de Lagrange*).**

Exercice 19. Groupe d'ordre ab avec $a \wedge b = 1$.
Soit G un groupe commutatif fini d'ordre $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$. On pose $A = \{x \in G$ tel que $x^a = e\}$ et $B = \{x \in G$ tel que $x^b = e\}$.

1) **Montrer que A et B sont des sous-groupes de G.**
2) **Montrer que $A \cap B = \{e\}$ et que tout élément $g \in G$ s'écrit de façon sous la forme $g = g_1 g_2$.**

Fin.