

FEUILLE D'EXERCICES : *Entiers naturels.*  
MPSI-SUP, RABAT

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : [mamouni.myismail@gmail.com](mailto:mamouni.myismail@gmail.com)

Source disponible sur:

©<http://www.chez.com/myismail>

**Exercice 1. Raisonement par récurrence :**

1) Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que :

a) 
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) 
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) 
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

d) 7 divise  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ .

e) 9 divise  $2^{2n} + 15n - 1$ .

f) 3 divise  $4^n + 5$ .

g)  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\frac{(mn)!}{m!n!} \in \mathbb{N}^*$ .

2) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists (p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $(2 + \sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{3}$ .

3) Soit  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , et  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que :  $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ .

**Exercice 2. Manipulation des sommes :**

1) Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  les sommes suivantes :

a) 
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$$

b) 
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)^2$$

c) 
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j)$$

d) 
$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \max(i, j)$$

2) Démontrer la formule dite de *Lagrange* :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

*On pourra raisonner par récurrence sur  $n \geq 2$ .*

3) En déduire l'inégalité dite de *Gauchy-Schwarz* :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

**Fin.**