Feuille d'exercices : *Integration sur un segment.*

Maths-PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Vendredi 03 Mars 2006.

Dans tous les énoncés $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ avec $a \leq b$

1) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$$

2) Soit $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\int_0^\pi f(t)\sin(t)dt = \int_0^\pi f(t)\cos(t)dt = 0$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0, \pi]$.
On pourra raisonner par l'absurde.

3) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $f(a+b-t) = f(t), \quad \forall t \in [a, b]$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

b) Application : Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t}{1+\sin t}dt$.

4) Pour $(p, q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 (1-t^p)^{\frac{1}{q}}dt$.
A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$.

5) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

a) Etudier sur $[0, b-a]$ les variations de la fonction $G_a(x) = \displaystyle\int_x^{x+a} |t|dt$.

b) En déduire $\displaystyle\inf_{[0,b-a]} G_a$.

c) En utilisant le changement de variable $u = t + x$, montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M_1(f)F_{b-a}(x+a) \quad \text{avec : } M_1(f) = \sup_{[a,b]} |f'|.$$

d) En déduire que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M_1(f)\frac{(b-a)^2}{4}$.

e) Quand a-t-on l'égalité ?

6) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\exists n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\int_0^1 t^k f(t)dt = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

a) Montrer que $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0, \forall P \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $r_1, \ldots, r_p$ les racines, distinctes de f dans $[a,b]$ dans lesquels f change de signe.

i. Montrer que $(t-r_1)f(t)$ garde un signe constant dans $[a,b]$.

ii. En déduire que $\prod_{k=1}^{p}(t-r_k)f(t)$ garde un signe constant dans $[a,b]$.

c) Conclure que f s'annule au moins $n+1$ fois dans $[a,b]$ en changeant de signe.

7) Irrationalité de π et de e.

Soit $(p,q,n) \in \mathbb{N}^{*3}$, on pose $P_n(X) = \dfrac{X^n(qX-p)^n}{n!}$.

a) Préciser les racines de P_n ainsi que leurs multiplicités .

b) Montrer que $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad \forall 0 \leq k \leq 2n$.

c) En déduire que $P_n^{(k)}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}, \quad \forall 0 \leq k \leq 2n$.
Penser à un changement de variable.

d) On suppose $\pi \in \mathbb{Q}$ et on pose $\pi = \dfrac{p}{q}$.

i. En déduire de ce qui précéde que $\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t dt \in \mathbb{Z}$.

ii. Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\pi} P_n(t)\sin t dt = 0$.

iii. Conclure que la suite $\left(\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire en 0.

iv. Déduire une contradiction, puis conclure.

e) En raisonnant cette fois sur $\int_0^{\pi} P_n(t)e^t dt$, montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

8) $\forall x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t^2}dt$.

a) Montrer que $\forall x > 0, \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $\forall x > 0, \quad F(x) = \arctan(x)\ln x - \int_1^x \dfrac{\arctan t}{t}dt$

c) Montrer que $\lim\limits_{0^+} F$ existe, et est finie.

On la note dans la suite par $\int_1^0 \dfrac{\ln t}{1+t^2}dt$, on ne cherchera pas à la calculer mais plutôt à en donner une valeur approchée.

On pose alors $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t dt$.

d) Montrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

e) En déduire pour $n \in \mathbb{N}, x \in]0,1]$ une majoration de

$$|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)|$$

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

Montrer que $|\int_1^0 \dfrac{\ln t}{1+t^2}dt - u_n| \leq \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

g) En déduire un encadrement de $\int_1^0 \dfrac{\ln t}{1+t^2}dt$ à 10^{-2} prés .

9) Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $f_0(x) = 1$ et $f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que les fonctions f_n sont bien définies.

b) Calculer f_1, f_2, f_3.

c) Montrer l'existence de deux suites réelles $(a_n), (b_n)$ vérifiant $f_n(x) = a_n x^{b_n}, \forall x \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.
On donnera b_n en fonction de n et a_{n+1} en fonction de a_n.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^n \ln a_n = -\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln(1-2^{-k})$.

e) Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq -x - \ln(1-x) \leq \frac{x^2}{2(1-x)}$.

f) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |-2^k \ln(1-2^{-k}) - 1| \leq 2^{-k}$, puis que $\ln a_n \leq \frac{n}{2^n}$.

g) Conclure que pour $x \in [0,1]$ fixe, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donner sa limite.

10) Pour $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue on pose $u_n = \int_0^1 f(t^n)dt$, on se propose dans la suite d'étudier le comportement asymptotique de cette suite.

a) Donner u_n ainsi que sa limite si $f(x) = x, \quad f(x) = x^\alpha, \quad f(x) = x(1-x)$.

b) Dans la suite on considère $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

ii. En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

iii. A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$1 - u_n = \frac{1}{n}\left(\ln 2 - \int_0^1 \ln(1+t^n)dt\right)$$

iv. Montrer que $\int_0^1 \ln(1+t^n)dt \leq \frac{1}{n+1}$

v. En déduire un encadrement de u_{10} à 10^{-2} prés.

11) Formule de la moyenne généralisée.
Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, f positive.

a) Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt$$

b) Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a,b[$.

c) Application :
Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt$.

12) Inégalité de Jensen.
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe.
Démontrer que $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))\,dt$.

13) Sommes de Riemann. On se propose de chercher les limtes des suites suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

b) $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

d) $\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$,
on pourra utiliser l'égalité : $x \leq e^x - 1 \leq x + \frac{ex^2}{2}$, $\forall x \in [0,1]$.

e) $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$, on pourra s'inspirer de l'exemple précedent.

f) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$ pour $k \geq 2$ fixé.

g) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$.

h) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)$.

i) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$.

j) Donner un équivalent pour $n \longrightarrow \infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

k) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

Chercher $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} A_1 A_k$.

14) Moyenne géométrique.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n} f\big(\frac{1}{n}\big)\Big)\Big(1 + \frac{1}{n} f\big(\frac{2}{n}\big)\Big) \ldots \Big(1 + \frac{1}{n} f\big(\frac{n}{n}\big)\Big) = \exp\Big(\int_t^1 f(t)\,dt\Big)$$

(On pourra utiliser : $\forall\, x \geq -\frac{1}{2},\ x - x^2 \leq \ln x \leq x$)

15) Maximum–minimum.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) définies par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \min(x, b_n)\,dx,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \max(x, a_n)\,dx.$$

16) Usage de symétrie.

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2(t)}\,dt$.

a) Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$, et en déduire la valeur de I.

b) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t}{1 + \sin t}\,dt$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)\,dt$.

On remarquera que $\cos t + \sin t = \sqrt{2} \cos\Big(\frac{\pi}{4} - t\Big)$.

$\boxed{\text{Fin.}}$