Corrigé Feuille d'exercices
Structure d'ev

Ex 3

1) mq $F_1 \cup F_2$ sev $\Rightarrow F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$

sinon $\exists x_1 \in F_1, x_1 \notin F_2$, $\exists x_2 \in F_2$ tq $x_2 \notin F_1$

donc $x_1 + x_2 \in F_1 \cup F_2$ d'où $x_1 + x_2 \in F_1 \cup F_2$

si $x_1 + x_2 \in F_1$ alors $x_2 = x_1 + x_2 - x_1 \in F_1$

si $x_1 + x_2 \in F_2$ alors $x_1 = x_1 + x_2 - x_2 \in F_2$

absurde

2) On raisonne par recurrence sur $n \geq 2$

si $E = \underset{\text{sev}}{F_1 \cup F_2}$ alors $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$ d'où $E = F_1$ ou $E = F_2$

impossible car F_1, F_2 sev stricts de E

supposons que $E \neq F_1 \cup \dots F_{n-1}$ et mq $E \neq F_1 \cup \dots \cup F_n$

supposons que $E = F_1 \cup \dots \cup F_n$

1er cas $F_n \subset F_1 \cup \dots F_{n-1}$ donc $E = F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ absurde

2e cas $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$

a) si $\lambda x + y \in F_n$ on a deja $x \in F_n$ donc $y = (\lambda x + y) - \lambda x \in F_n$ impossible

b) supposon qu'il existe au moins $\lambda \neq \mu$ tq $\lambda x + y \in F_i$, $\mu x + y \in F_i$

donc $(\lambda - \mu) x \in F_i$ d'où $x \in F_i$ absurde car $x \notin F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$

c) Considerons $\lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_n$ deux à deux distincts

$\lambda_i x + y \in E = F_1 \cup \dots \cup F_n$ et $\lambda_i x + y \notin F_n$ donc $\lambda_i x + y \in F_1 \cup \dots F_{n-1}$

donc on dispose de n objet $(\lambda_i x + y)_{1 \leq i \leq n}$ qui appartiennent à $n-1$ tirois $F_1, \dots, F_{n-1}$ l'un des tirois F_i contient au moins deux objets $\lambda_i x + y$

contradiction avec b)

EX 5 Soit $P(X) = X^2 + X = X(X+1)$ tq $\underbrace{X}_{P} \wedge \underbrace{(X+1)}_{Q} = 1$

d'après le thm de decomposition des noyaux

$\mathrm{Ker}\, P(f) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(f) = \mathrm{Ker}\, (PQ)(f)$

ie $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker}\,(f + id_E) = \mathrm{Ker}\,(f^2 + f) = \mathrm{Ker}\, 0 = E$

EX 15 Pareil

Ex 12

1) $f^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$
Inverst $f(x) = 0 \Rightarrow x = f \circ g(x) \in \mathrm{Im} f$ $\quad (f \circ g + g \circ f = id_E)$

2) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$ et $E = F \oplus \mathrm{Ker} f$

a) $x = x_1 + x_2$ tq $f(x_2) = 0$ et $x_2 = f(x_3)$

$f(x) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f \Rightarrow f^2(x) = 0$

b) $x = x_1 + f(x_3) = y + f(z)$ où $x_3 \in E \Rightarrow x_3 = z + x_4$, $z \in F$, $x_4 \in \mathrm{Ker} f$
$\Rightarrow f(x_3) = f(z)$

unicité $x = y + f(z)$
$x = y' + f(z')$ $\Rightarrow \underbrace{y - y'}_{\in F} = \underbrace{f(z - z')}_{\in \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f} = 0$

EX 18

1) $v, w \in C(u) \Rightarrow \begin{cases} w \circ u = u \circ w \\ v \circ u = u \circ v \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u \circ v \circ w = v \circ u \circ w = v \circ w \circ u \\ u \circ (v + \lambda w) = u \circ v + \lambda u \circ w = v \circ u + \lambda w \circ u = (v + \lambda w) \circ u \\ id \circ u = u \circ id \end{cases}$

$\Rightarrow v \circ w,\ v + \lambda w$ et $id_E \in C(u)$

$\Rightarrow C(u)$ algèbre

2) $E = \mathrm{Im}\,p \oplus \mathrm{Ker}\,p$

$\boxed{\begin{array}{l} F \text{ stable} \Leftrightarrow p(F) \subset F \\ \text{i.e. } x \in F \Rightarrow p(x) \in F \end{array}}$

$\Rightarrow$) supposons $v \circ p = p \circ v$

$x \in \mathrm{Im}\,p \Rightarrow p(x) = x \Rightarrow v \circ p(x) = v(x) \Rightarrow p \circ v(x) = v(x)$
$\Rightarrow v(x) \in \mathrm{Im}\,p$

$x \in \mathrm{Ker}\,p \Rightarrow p(x) = 0 \Rightarrow v \circ p(x) = 0 \Rightarrow p \circ v(x) = 0 \Rightarrow v(x) \in \mathrm{Ker}\,p$

$\Leftarrow$) $x \in E \Rightarrow x = x_1 + x_2$ tq $x_1 \in \mathrm{Ker}\,p$ et $x_2 \in \mathrm{Im}\,p$

donc $v(x_1) \in \mathrm{Ker}\,p$ et $v(x_2) \in \mathrm{Im}\,p$ i.e. $p(x_1) = 0$, $p(x_2) = x_2$

donc $p(v(x_1)) = 0$ et $p(v(x_2)) = v(x_2)$

donc $p(x) = x_2$ et $v \circ p(x) = v(x_2)$

$p \circ v(x) = pv(x_1) + pv(x_2) = v(x_2)$ d'où $v \circ p = p \circ v$

Ex 21

1) $x \in \mathrm{Ker}(f - id_E) \cap \mathrm{Im}(f - id_E)$

$\Rightarrow f(x) = x$ et $x = f(x_1) - x_1$

donc $x = f^2(x) = f^3(x)$

donc $f^2(x_1) - f(x_1) = f(x_1) - x_1$

donc $f^3(x_1) - f^2(x_1) = f^2(x_1) - f(x_1)$

$x_1 - f^2(x_1) = f^2(x_1) - f(x_1)$

donc $x = f(x_1) - x_1$

$x = f(x) = f^2(x_1) - f(x_1)$ car $f^3 = id_E$

$x = f^2(x) = x_1 - f^2(x_1)$

d'où $3x = 0$ donc $x = 0$

d'où $\mathrm{Ker}(f - id_E) \cap \mathrm{Im}(f - id_E) = \{0\}$

d'autre part $\dim \mathrm{Ker}(f - id) + \dim \mathrm{Im}(f - id) = \dim E$

d'où l'égalité

2) $f^3 - id_E = 0 \Rightarrow (f - id_E)\circ(f^2 + f + id_E) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} Im(f^2 + f + id_E) \subset Ker(f - id_E) \\ Im(f - id_E) \subset Ker(f^2 + f + id_E) \end{cases}$$

et $\dim Im(f^2+f+id_E) \cancel{+} \dim Ker(f^2+f+id_E) \pm \dim E$

$\{ \dim (Im f - id_E) + \dim Ker(f - id_E) = \dim E$

$\dim Im(f^2+f+id_E) - \underbrace{\dim Ker(f-id_E)}_{\text{negatif}}$

$= \dim \underbrace{Ker(f^2+f+id_E) - \dim Im(f-id_E)}_{\text{positif}}$

donc les deux sont nuls d'où l'égalité

~~EX~~ 36

1) $\dim \mathbb{R}_{2n-1}(X) = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$ il suffit de mq φ soit linéaire injective

linéarité : $\varphi(P + \lambda Q) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$ facile

Injection : $\varphi(P) = 0 \Rightarrow P(r_k) = P'(r_k) = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$

$\Rightarrow \text{mult}(r_k, P) \geq 2 \quad \forall k$

$\Rightarrow (X - r_k)^2$ divise P

et $(X - r_k)^2 \wedge (X - r_{k'}) = 1$ qd $r_k \neq r_{k'}$

$\Rightarrow Q = \prod_{k=1}^{n} (X - r_k)^2$ divise P

mais $\deg Q = 2n$ et $\deg P = 2n-1$ donc $P = 0$

2) φ surj donc $(f(r_1), \dots, f'(r_n)) \in \mathbb{R}^{4}$ admet un unique antécédant P tq $\varphi(P) = (f(r_1) \dots f'(r_n))$

donc $P(r_k) = f(r_k)$ et $P'(r_k) = f'(r_k)$

EX 38

1) supposons $\lambda_0 u + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(u) = 0$ avec $f^{p-1}(u) = 0$

on compose par f^{p-1} donc $\lambda_0 f^{p-1}(u) = 0$

d'où $\lambda_0 = 0$

puis on compose par f^{p-2} d'où $\lambda_1 = 0$

et ainsi de suite

2) $\beta = (u, \dots f^{p-1}(u))$ libre donc $p = \text{card}\, \beta \leq \dim E = n$

or $f^p = 0$ d'où $f^n = 0$

3) il suffit de mq $f+g$ est inj puisque c'est un endom en dim finie

$(f+g)(x) = 0 \Rightarrow f^p(x) + f^{p-1} g(x) = 0$

$\Rightarrow g f^{p-1}(x) = 0 \xrightarrow{g \text{ autom}} f^{p-1}(x) = 0$

puis on compose par f^{p-2} ds $f+g$ d'où $f^{p-2} = 0$

et ainsi de suite jusque $f(x) = 0$ puis $x = 0$

EX 39

par def de p la famille $(x, \dots f^{p-1}(x))$ est libre

mais $(x, \dots f^p(x))$ est liée

donc $f^p(x) \in \text{Vect}(x, \dots f^{p-1}(x))$

supposons $f^k(x) \in \text{Vect}(x, \dots f^{p-1}(x))$

donc $f^{k+1}(x) \in \text{Vect}(f(x), \dots f^p(x)) \subset \text{Vect}(x, \dots f^{p-1}(x))$

car $f^p(x) \in \text{Vect}(x, \dots f^{p-1}(x))$

donc $(x, \dots f^{p-1}(x))$ est une base de cardinal p

d'où $p = n$

2) $g(x) \in E = \mathrm{Vect}(x, \dots f^{n-1}(x)) \Rightarrow g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x) = P(f)(x)$

où $P(f) = \sum \alpha_k f^k$

et $g f^k(x) = \cancel{P(f)} f^k(x) = f^k \circ g(x) = f^k \circ P(f)(x)$

$= P(f) \circ f^k(x) = P(f)(f^k(x))$

donc $g = P(f)$ sur la base $(x, \dots, f^{n-1}(x))$ donc sur E

Si $g = P(f)$ il est clair que $f \circ P(f) = P(f) \circ f$

Ex 40

1) $\mathrm{Ker} f^k \subset \mathrm{Ker} f^{k+1}$ et $\mathrm{Im} f^{k+1} \subset \mathrm{Im} f^k$ facile à retenir

2) $\dim(N_k)$ est une suite croissante d'entier majorée par $\dim E$ donc cvgle donc stationnaire

ie $\exists p / \dim N_p = \dim N_{p+1} = \dots$ mais $N_p \subset N_{p+1} \subset \dots$

d'où $N_p = N_{p+1} = \dots$

3) $N_p = N_{p+1} \overset{N_p \subset N_{p+1}}{\Leftrightarrow} \dim N_p = \dim N_{p+1} \Leftrightarrow \dim I_p = \dim I_{p+1}$

(thm du rang)

$\overset{I_{p+1} \subset I_p}{\Leftrightarrow} I_p = I_{p+1}$

4) $y \in N_p \cap I_p \Rightarrow f^p(y) = 0$ et $y = f^p(x)$

$\Rightarrow f^{2p}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{2p} = N_p \Rightarrow f^p(x) = y = 0$

et $\dim(N_p \oplus I_p) = \dim N_p + \dim I_p = \dim E$

et $N_p \oplus I_p \subset E$ d'où l'égalité

5) Supposons que
$I_{k+1} = I_k \oplus F$

alors $f(I_{k+1}) = f(I_k) + f(F)$

donc $f(F) \subset f(I_{k+1}) = I_{k+2}$

et $f(I_k) = I_{k+1} \subset I_{k+2}$

d'où $I_{k+1} + f(F) \subset I_{k+2}$

inversement

$y \in I_{k+2} \Rightarrow y = f^{k+2}(x)$ et $f^{k+1}(x) \in I_{k+1} = I_k + F$

donc $f^{k+1}(x) = f^k(x') + x''$, $x'' \in F$

et $y = f^{k+1}(x') + f(x'') \in I_{k+1} + f(F)$

d'où $I_{k+2} = I_{k+1} + f(F)$

donc $\dim I_{k+2} = \dim I_{k+1} + \dim f(F) - \dim(I_{k+1} \cap f(F))$

$\dim I_{k+2} - \dim I_{k+1} \leq \dim f(F) \leq \dim F = \dim I_{k+1} - \dim I_k$

Fin

6