

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَعَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

DS 8 (07-08) : *Fonctions intégrables*
Fonctions à deux variables

Mercredi 07 Mai 2008.

Durée : 4 heures

Problème 1

Notations : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 0, y > 0\}$ et f de classe \mathcal{C}^2 sur D . On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $t = \frac{y}{x}$ et $g(r, t) = f(x, y)$, on admet que si g est aussi de classe \mathcal{C}^2 sur D . On pose aussi $Tf(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$ on considère l'ensemble : $N_a = \{f \in \mathcal{C}^1(D) \text{ tel que } Tf - af = 0\}$.

- 1) Montrer que D est un ouvert.
- 2) Montrer que l'application, $T : f \longrightarrow Tf$ est linéaire.
- 3) Si $(f, h) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(D)$, exprimer $T(fh)$ en à l'aide f, h, Tf et Th .
- 4) Si $(f, \varphi) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, donner l'expression de $T(\varphi \circ f)$.
- 5) Exprimer Tf à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial t}, r, t$.
- 6) Calculer Tt .
- 7) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$ alors $\varphi \circ t \in N_0$.
- 8) En déduire la forme générale des fonctions $f \in N_0$.
- 9) Calculer Tr .
- 10) Montrer que $f \in N_0 \iff rf \in N_1$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_1$.
- 11) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $t(r^a)$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_a$.
- 12) On se propose dans la suite de résoudre l'équation : (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$.

- a) On suppose d'abord que : $a = b$
Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \varphi(r)h$ où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$ que l'on explicitera, en déduire la forme générale des solutions de (*).
- b) On suppose maintenant que : $a \neq b$
Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \lambda h$ où λ est une constante que l'on explicitera ; en déduire la forme générale des solutions de (*).

13) Résoudre les équations suivants :

a) $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + xy}$.

b) $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x - y)}{x + y}$.

Problème 2

La constante d'Euler, la transformée de Laplace et la fonction de Bessel

Partie I : La constante d'Euler.

1) Montrer que les fonctions (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1), \forall n \geq 1$$

sont adjacentes, on notera γ , leur limite commune, appelée la *constante d'Euler*, qu'on ne cherchera pas à calculer.

- 2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1 - (1-x)^n}{x}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
- 3) Montrer que f est une fonction polynômiale, préciser son degré ainsi que son coefficient dominant.
- 4) Exprimer $f(x)$ en fonction de $1, x-1, \dots, (x-1)^{n-1}$.
- 5) Calculer $\int_0^1 f(t)dt$ de deux façons puis en déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} C_n^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Partie II : La transformée de Laplace.

Une fonction continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite *d'ordre exponentiel* si et seulement si $\exists \alpha > 0$ tel que la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t} f(t)$ soit bornée sur $[0, +\infty[$, dans ce cas pour tout $x > 0$, on définit la *transformée de Laplace* de f au point x par la relation suivante :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

L'ensemble des fonctions dite d'ordre exponentiel se note \mathcal{E} .

- 1) Montrer que l'application $f(t) = t^n, n \geq 1$ est d'ordre exponentiel, alors que $g(t) = e^{t^2}$ ne l'est pas.
- 2) Montrer que \mathcal{E} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- 3) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est bien définie, et que l'application $f \mapsto L(f)$ est linéaire.
- 4) Calculer $L(f)(x)$ dans chacun des cas suivants :
 - a) $f(t) = t^n, n \geq 1$.
 - b) $f(t) = e^{-at}, a > 0$.
 - c) $f(t) = t^n e^{-at}, a > 0, n \geq 1$.
 - d) $f(t) = e^{-at} \sin(bt), a, b > 0$.
 - e) $f(t) = e^{-at} \cos(bt), a, b > 0$.
- 5) Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $f' \in \mathcal{E}$, montrer que $L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0), \forall x > 0$.
- 6) Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $f', f'' \in \mathcal{E}$, montrer que $L(f'')(x) = x^2 L(f)(x) - x f'(0) - f''(0), \forall x > 0$.
- 7) Retrouver la formule de $L(f)(x)$ quand $f(t) = t^n, n \geq 1$.
- 8) **Application.** Dans la suite du problème, on admettra que l'application $f \mapsto L(f)$ est injective sur \mathcal{E} , et on se propose de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) + 2Y(t) \\ Y'(t) = Y(t) + e^t \\ X(0) = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

Pour cela on pose $x(s) = L(X)(s)$ et $y(s) = L(Y)(s)$.

- a) Écrire le système d'équations vérifiées par les fonctions x et y .
- b) Résoudre ce système, puis en déduire $X(t)$ et $Y(t)$.

Partie III : La fonction de Bessel.

On admet dans cette partie qu'on peut dériver à l'intérieur d'une intégrale, et qu'on peut aussi permuter l'ordre d'intégration. Pour tout réel x , on pose

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$$

- 1) Exprimer J' et J'' à l'aide d'intégrales.
- 2) Montrer que $J'(x) = -\frac{x}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t \cos(x \cos t) dt$, puis que J est solution de l'équation différentielle $xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$.
- 3) Pour tout réel $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^\pi \frac{1}{x^2 + \cos^2 t} dt$.
 - a) Montrer que $I(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 + \cos^2 t} dt$.

b) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 + \cos^2 t} dt$, à l'aide d'un changement de variable approprié, puis en déduire $I(x)$.

4) Calculer la transformée de Laplace de la fonction de Bessel J .

Partie IV : Transformée de Laplace de la fonction logarithmique.

Dans cette partie on admet qu'on peut permuter intégrales et limites.

1) Montrer que la fonction $g : t \mapsto e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) Pour tout réel $x > 0$ et entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$\begin{cases} U_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \ln x & \text{si } x \in]0, n] \\ = 0 & \text{si } x \geq n \end{cases} .$$

a) Pour $x > 0$ fixé, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x)$.

b) Montrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |U_n(x)| \leq e^{-x} |\ln x|$, puis en déduire que U_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3) On pose $J_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt$, justifier l'existence de J_n puis calculer sa limite.

4) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto t^p \ln(nt)$ sur $]0, 1]$ puis calculer $\int_0^1 t^p \ln(nt) dt$.

5) Exprimer J_n en fonction de u_n .

Indication : On pourra utiliser la formule $(k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k$ et la question 5 de la partie I.

6) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ en fonction de la constante d'Euler, γ .

7) Montrer que la transformée de Laplace de la fonction logarithme est bien définie pour tout $x > 0$, puis la calculer.

Fin.