Partie 2.

5/ On considère la fonction φ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} \text{ si } x\neq 0 \text{ et } \varphi(0)=0.$$

5.a/ Etude de φ en 0.

3 (i) Déterminer le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

1 (ii) En déduire que φ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.

2+2 5.b/ Calculer $\lim_{x\to 0}\varphi'(x)$, en déduire que φ est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

5.c/ Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\psi(x)=\frac{x}{\sin x}$ si $x\neq 0$ et $\psi(0)=1$.

2+0,5 Montrer que ψ une fonction de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.

6/ Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $\lambda>0$.

1,5+0,5 $$\left|\int_a^b g(t)\sin\lambda t\,dt\right|\leq\frac{1}{\lambda}\left(|g(a)|+|g(b)|+\int_a^b|g'(t)|dt\right)$$

En déduire la valeur de $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt$.

7.a/ Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction σ_n sur $[0,\pi]$ par : $\sigma_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)$.

2 (i) Montrer, sans récurrence, que : $\forall t\in\,]0,\pi[\quad,\quad \sigma_n(t)=\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$.

0,5+0,5 (ii) Calculer $\sigma_n(0)$ et $\sigma_n(\pi)$.

1,5 7.b/ Calculer la valeur de l'intégrale $J_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$.

Partie 3.

8/ Calcul de la limite de $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{t}dt$.

1,5 8.a/ Déterminer la limite de $\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin(2n+1)t\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1,5 8.b/ En déduire la limite de $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{\cancel{\sin}\, t}dt$ lorsque n tend vers $+\infty$. *

9/ Etude d'une fonction définie par une intégrale.

0,5 9.a.i/ Justifier que la fonction définie par $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$.

2 9.a.ii/ Montrer que : $F((2n+1)\frac{\pi}{2})=I_n$.

1 9.b.i/ Soit x un réel supérieur ou égal à $\pi/2$. Justifier l'existence d'un entier naturel n (dépendant de x) tel que : $(2n+1)\frac{\pi}{2}\leq x<(2n+3)\frac{\pi}{2}$. On note $\alpha(x)=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

1,5 9.b.ii/ Montrer que $\int_x^{\alpha(x)}\frac{\sin t}{t}dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2 9.c/ En déduire que $F(x)$ admet une limite l lorsque x tend vers $+\infty$. Préciser l.

10/ Vitesse de convergence de F.

2 10.a/ Soient x et y deux réels tels que $0<x<y$. Montrer que $\left|\int_x^y\frac{\sin t}{t}dt\right|\leq\frac{2}{x}$ (on effectuera une intégration par parties)

2 10.b/ En déduire que pour tout $x>0$, $|l-F(x)|\leq\frac{2}{x}$.

Partie 4. Calcul de $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt$.

0,5 11/ Montrer que la fonction g définie par $g(t)=\frac{|\sin t|}{t}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$. *

On note G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $G(x)=\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt$.

1,5 12/ Montrer que G est dérivable est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

13/ Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt$.

2 13.a/ Montrer que pour tout $n>0$, $I_n\geq\frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|\,dt$, en déduire que $I_n\geq\frac{2}{n\pi}$.

1 13.b/ Montrer que $\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt\geq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1 13.c/ Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On pose $\beta(x)=\left[\frac{x}{\pi}\right]$ (partie entière)

\+ Justifier que $\pi\beta(x)\leq x<\pi\beta(x)+\pi$ et que $\lim_{x\to+\infty}\beta(x)=+\infty$.

0,5 Montrer ensuite que $G(x)\geq\int_0^{\pi\beta(x)}\frac{|\sin t|}{t}dt$.

14/ Etude de la suite de terme général $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1 14.a/ Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Dans la suite on rappelle que si une suite est croissante et n'admet pas une limite finie alors elle tend vers $+\infty$.

1,5 14.b/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$.

1,5 14.c/ En déduire que $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

1,5 15/ Calculer la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

62,5 + 4 pts pour la présentation et la rédaction

Lycée Moulay Youssef Rabat
SUP 2. 5 : 10 – 11 - 2008

N. global /60

Devoir surveillé n°2
Durée 4h

Problème.

Partie 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ une racine n^{ième} primitive de 1.

1+1 1.a/ Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$. (cas de n=1)

1,5 1.b/ Calculer selon $p \in \mathbb{Z}$ la somme : $I_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ (cas de n=1)

1,5+1 1.c/ On pose, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+bk)$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+bk)$.

Calculer $C_n + iS_n$, en déduire les valeurs de C_n et S_n.

3 2/ Cas particulier $n = 4$. On note pour $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, $f(z) = (1+z)^p$

Calculer de deux façons la somme $f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) + f(\omega^3)$, en déduire la valeur de $\sum_{0 \le 4k \le p} C_p^{4k}$

3/ On pose $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$.

3 3.a/ Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j+k)^2} = G_n$. (On écrira j sous la forme $j = nq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \le r < n$) (*)

3 3.b/ Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} I_{n,2k} = G_n \overline{G}_n$.

1,5 3.c/ En déduire une expression simple de $|G_n|^2$ en fonction de la parité de n.

4/ Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

2,5 4.a/ Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^p = n \sum_{0 \le k \le \frac{p}{n}} C_p^{kn}$. (on pourra utiliser 1.b/) (*)

1,5 4.b/ En déduire la valeur de $\sum_{0 \le k \le \frac{p}{4}} C_p^{4k}$ calculée en 2/.