

Devoir Surveillé N°8**Lundi le:21-Avril-2003**

Determinats & Systèmes Lineaires

Durée:4h

Exercice 1 :

Inverser la matrice suivante $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ en utilisant la co-matrice et la méthode de

la résolution d'un système

Exercice 2 :

Calculer le determinant suivant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
Exercice 3 : Determinant de *Van-Der-Monde* :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ réels deux a deux distincts ,pour $1 \leq k \leq n$ on pose $\Delta_k = V(a_1, a_2, \dots, a_k) = \left| (a_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq k} \right|$, $P(X) = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, X)$

1. Expliciter $\Delta_k = V(a_1, a_2, \dots, a_k) = \left| (a_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq k} \right|$, $P(X) = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, X)$
2. Dire pourquoi $P(X)$ est un polynome de degre inferieur a n et donner son coefficient dominant
3. Calculer $P(a_i)$, $1 \leq i \leq n-1$, en deduire la decomposition de $P(X)$ en facteur irreductible
4. En deduire une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} puis en deduire Δ_n

Exercice 4 : Determinant de *Cauchy* :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, $(b_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$ réels deux a deux distincts ,pour $1 \leq k \leq n$ on pose $\Delta_k = \left| \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right|$. Donner une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} puis en deduire Δ_n (Indication : On pourra retrancher de chaque ligne la 1ere ligne , factoriser dans les lignes et colonnes puis retrancher de chaque colonne la 1ere colonne , factoriser dans les lignes et colonnes

Exercice 5 :

Resoudre le systeme lineaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_5 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 6x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 4x_5 = 18 \end{cases}$$

Problème 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On se propose d'inverser la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \dots & \cdot & 1+a_n \end{bmatrix} \quad \text{où } (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \text{ réels deux à deux distincts}$$

1. Soit $(r_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ réels deux à deux distincts $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$A(x) = \begin{bmatrix} r_1+x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & r_2+x & a+x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a+x \\ b+x & \dots & \cdot & b+x & r_n+x \end{bmatrix} \quad \text{et } D(x) = \det(A(x)) \text{ . Montrer}$$

que: $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $D(x) = \alpha x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2. a. On suppose $a \neq b$ calcule α, β dans ce cas, on trouvera: $\beta = \frac{aP(b)-bP(a)}{a-b}$ où

$$P(X) = \prod_{i=1}^n (r_i - X)$$

- b. On suppose maintenant que : $a = b$ on se ramenant au 1er cas et à l'aide d'une limite montrer que : $\beta = P(a) - aP'(a)$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible, que l'on supposera réalisée dans toute la suite du problème ainsi que : $a_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$

4. Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $Y = AX$ avec $Y = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ on pose $s = \sum_{i=1}^n x_i$ et $p = \prod_{i=1}^n a_i$ et $p_i = \frac{p}{a_i}$

. Montrer alors que :

- a. $s + a_i x_i = b_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$

b. $\det(A) = p + \sum_{i=1}^n p_i$

c. $s \det(A) = \sum_{i=1}^n p_i b_i$

5. Exprimer les x_i en fonction des y_i puis inverse A
6. Vérifier le résultat trouvé pour $n = 2, n = 3$