CONTRÔLE : *Logie*
Théorie des ensembles

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Vendredi 28 Septembre 2007.

Durée 1 heure.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمُ وَ رَسُولَهُ وَ المُؤ مِنِين

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies. (2 points)

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Exercice 1. *1 point*

En raisonnant par l'absurde, montrer que si un entier $q > 1$ divise l'entier $n > 0$, alors q ne divise pas $n + 1$.

Exercice 2. *5 points*

Soit E un ensemble non vide et $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, croissante pour l'inclusion, c'est à dire vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), \quad A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$$

Une partie X de E est dite fixe par f ***si et seulement si*** $f(X) = X$.

On pose $\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } f(X) \subset X\}$ et $X_0 = \bigcap_{X \in \mathcal{S}} X$.

1) ***(1 point)*** Montrer que $\mathcal{S} \neq \emptyset$.
2) ***(0.5 point)*** Montrer que $\forall X \in \mathcal{S}$ on a : $X_0 \subset X$.
3) ***(0.5 point)*** En déduire que $f(X_0) \subset X_0$.
4) ***(1 point)*** Montrer que $f(X_0) \in \mathcal{S}$.
5) ***(1 point)*** En déduire que $f(X_0) = X_0$.
6) ***(1 point)*** Montrer que X_0 est la plus petite partie, au sens de l'inclusion, fixe par f.

Exercice 3. *4 points*

Les habitants de la planète Giloque sont de deux types.
Les "menteurs" mentent toujours et les "changeants" parfois mentent et parfois disent la vérité.
Vous rencontrez quatre habitants X,Y,Z,T (dont au moins deux menteurs) de cette planète qui vous disent :
X : de deux choses l'une, ou bien Y est Changeant, ou bien T est changeant.
Y : si je suis un menteur, X est un changeant.
Z : ou bien je suis un menteur et Y est un changeant, ou bien je suis un changeant et Y est un menteur.
T : ce problème n'était pas intéressant.
Ce problème était-il intéressant.

Source : Revue "***Jeux et Stratégie***"

Fin.