Corigé du Contrôle : *Théorie des ensembles.*
MPSI-High Tech, Rabat

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *mamouni.myismail@gmail.com*

Source disponible sur:
©http://www.chez.com/myismail

Mardi, 23 Septembre 2008
Dure: 1 heure

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلَهُ وَ المُؤ مِنِين
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Exercice 1.

1) a) $f(X) = A \cup X$, donc $X \subset f(X)$.

b) $X \subset Y \Longrightarrow A \cup X \subset A \cup Y \Longrightarrow f(X) \subset f(Y)$, donc f est croissantr au sens de l'inclusion.

c) $\forall\, x \subset \mathcal{P}(H)$, on a $f(f(X)) = f(A \cup X) = A \cup A \cup X = A \cup X = f(X)$.

2) a) $X \in F \iff f(X) = X \iff A \cup X = X \iff A \subset X$, donc $F = \{X \in \mathcal{P}(H) \text{ tel que } A \subset X\}$.

b) $Y \in F_X \iff Y \in F$ et $X \subset Y \iff A \subset Y$ et $X \subset Y \iff A \cup X \subset Y$, d'où $F_X = \{Y \in \mathcal{P}(H) \text{ tel que } A \cup X \subset Y\}$.

c) $\forall Y \in F_X$ on a $A \cup X \subset Y$, d'autre part $f(A \cup X) = f(f(X)) = f(X) = A \cup X$ et $X \subset A \cup X$, donc $A \cup X \in F_X$.
Conclusion : $A \cup X$ est le plus petit élément de F_X.

d) Pour que f soit surjective il faut que $\forall Y \in \mathcal{P}(H)$, $\exists X \in \mathcal{P}(H)$ tel que $Y = f(X) = A \cup X$, donc $A \subset Y$, c'est impossible pour $Y = \emptyset$, donc f n'est pas surjective.
Pour que f soit injective il faut que $\forall X, X' \in \mathcal{P}(H)$, $f(X) = f(X') \Longrightarrow X = X'$, mais ceci n'est pas réalisé quand $X = A$ et $X' = \emptyset$, donc f n'est pas injective.

Exercice 2.

1) Implication directe : supposons que $x \preccurlyeq y$ et montrons que $\varphi(x) \subset \varphi(y)$, en effet : $t \in \varphi(x) \Longrightarrow t \preccurlyeq x \Longrightarrow t \preccurlyeq y$ car $x \preccurlyeq y$ et $\preccurlyeq$ est transitive, donc $t \in \varphi(y)$, d'où $\varphi(x) \subset \varphi(y)$.
Réciproquement, supposons que $\varphi(x) \subset \varphi(y)$, comme $\preccurlyeq$ est reflexive, alors $x \preccurlyeq x$, donc $x \in \varphi(x) \subset \varphi(y)$, d'où $x \preccurlyeq y$.

2) $\varphi(x) = \varphi(y) \Longrightarrow \varphi(x) \subset \varphi(y)$ et $\varphi(y) \subset \varphi(x) \Longrightarrow x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x \Longrightarrow x = y$ car $\preccurlyeq$ est antisymétrique, donc φ est injective.

3) Reflexivité : $x\mathcal{R}x$ car $\varphi(x) = \varphi(x)$.
Anti-symétrie : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Longrightarrow x = y$ car φ est injective.
Transitivité : découle de la transitivité de l'inclusion.

$\boxed{\text{Fin.}}$