

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II - ALGÈBRE - 3 heures

Partie 1

Étude des matrices de Gram

1.a) Pour i fixé, notons $y = x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$ et C_j le j^e vecteur colonne de $G(X)$.

Considérons la matrice $G'(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p)$ déduite de la matrice $G(X)$ par l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$.

D'après les propriétés des déterminants, $\det(G(X)) = \det(G'(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p))$.

$$\text{On a } G'(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|y) & \dots & (x_1|x_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (x_i|x_1) & \dots & (x_i|y) & \dots & (x_i|x_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (x_p|x_1) & \dots & (x_p|y) & \dots & (x_p|x_p) \end{pmatrix}.$$

Notons L'_i la i^e ligne de cette matrice.

L'opération élémentaire $L'_i \leftarrow L'_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L'_j$ transforme $G'(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p)$

$$\text{en } \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|y) & \dots & (x_1|x_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (y|x_1) & \dots & (y|y) & \dots & (y|x_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (x_p|x_1) & \dots & (x_p|y) & \dots & (x_p|x_p) \end{pmatrix} \text{ qui n'est autre que } G(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p).$$

De plus, l'opération élémentaire précédente ne change pas la valeur du déterminant.

$$\text{Ainsi } \det(G(X)) = \det(G(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, x_{i+1}, \dots, x_p)).$$

b) Si X est liée, alors l'un des vecteurs x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des x_j avec $j \neq i$ sous la forme $x_i = \sum_{j \neq i} \mu_j x_j$.

$$\text{D'après a), } \det(G(X)) = \det(G(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \sum_{j \neq i} (-\mu_j) x_j, x_{i+1}, \dots, x_p))$$

$$= \det(G(x_1, \dots, x_{i-1}, 0_E, x_{i+1}, \dots, x_p)) \text{ qui est nul car la } i^e \text{ colonne est nulle.}$$

c) On sait que toute permutation de \mathcal{S}_p peut se décomposer en produit de transpositions. Il suffit donc de montrer que $\forall i < j, \det(G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p)) = \det(G(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p))$, ce qui est immédiat car le deuxième déterminant se déduit du premier par échange des lignes i et j d'une part, des colonnes i et j d'autre part, chaque échange remplaçant un déterminant par son opposé.

Ainsi $\det(G(X))$ ne dépend pas de l'ordre de x_1, \dots, x_p .

2.a) Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F . Notons $p_{k\ell}$ le coefficient d'indice (k, ℓ) de $P_B(X)$.

$$\text{Ainsi } x_i = \sum_{k=1}^p p_{ki} e_k \text{ et } x_j = \sum_{\ell=1}^p p_{\ell j} e_\ell.$$

Puisque B est une base orthonormée de F , $(x_i | x_j) = \sum_{k=1}^p p_{ki} p_{kj} = \sum_{k=1}^p p'_{ik} p_{kj}$ qui est le coefficient d'indice (i, j) du produit matriciel ${}^t P_B(X) \cdot P_B(X)$.

Donc $G(X) = {}^t P_B(X) \cdot P_B(X)$.

Remarque importante :

en notant r le rang de X ($r \leq p$), alors $\dim F = r$ et $P_B(X)$ est donc une matrice rectangulaire de $M_{r,p}(\mathbf{R})$.

b) $G(X)$ est symétrique positive : en effet $\forall Y \in M_{p,1}(\mathbf{R})$, ${}^t Y G(X) Y = {}^t Z Z \geq 0$ avec $Z = P_B(X) Y$.
On sait qu'alors $G(X)$ admet p valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, (distinctes ou non) positives,

$$\text{donc } \det(G(X)) = \prod_{i=1}^p \lambda_i \geq 0.$$

Si X est libre, alors le rang r de X est égal à p : dans ce cas $P_B(X)$ est une matrice carrée inversible, donc $\det(G(X)) = \det({}^t P_B(X)) \cdot \det(P_B(X)) = \left(\det(P_B(X))\right)^2 > 0$.

3.a) Contraposons en montrant que la famille (x_1, \dots, x_q) est liée dans E si et seulement si la famille (C_1, \dots, C_q) est liée dans $M_{p,1}(\mathbf{R})$.

• Supposons que (x_1, \dots, x_q) soit liée : alors un des x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des x_j

$$\text{pour } j \neq i \text{ de la forme } x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \lambda_j x_j.$$

$$\text{Alors } C_i = \begin{pmatrix} (x_1 | x_i) \\ \vdots \\ (x_k | x_i) \\ \vdots \\ (x_p | x_i) \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \lambda_j \begin{pmatrix} (x_1 | x_j) \\ \vdots \\ (x_k | x_j) \\ \vdots \\ (x_p | x_j) \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \lambda_j \cdot C_j, \text{ donc } \underline{(C_1, \dots, C_q) \text{ est liée.}}$$

• Supposons que (C_1, \dots, C_q) soit liée : alors un des C_i peut s'exprimer comme combinaison linéaire des

C_j pour $j \neq i$ de la forme $C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \lambda_j \cdot C_j$, ce qui donne en identifiant les termes de chaque ligne :

$$\forall k = 1 \dots p, (x_k | x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \lambda_j (x_k | x_j), \text{ donc } \forall k = 1 \dots p, (x_k | x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \lambda_j x_j) = 0.$$

Le vecteur $y = x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \lambda_j x_j$ est élément de F et orthogonal à tous les éléments d'une famille génératrice

de F : il est donc nul, d'où $x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \lambda_j x_j$, donc (x_1, \dots, x_q) est liée.

b) Notons r le rang de la famille X .

Alors il existe r vecteurs de X linéairement indépendants et tout système qui a plus de r éléments de X est lié.

Donc il existe r colonnes de $G(X)$ linéairement indépendants et tout système qui a plus de r colonnes est lié, donc le rang de $G(X)$ est égal au rang r de X .

Partie 2

On suppose dans cette partie que X est une famille libre.

Pour $i \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, on note F_i l'espace engendré par (x_1, \dots, x_i) et p_i la projection orthogonale sur F_i .

On pose $u_1 = x_1$ et pour i entre 1 et $p-1$, $u_{i+1} = x_{i+1} - p_i(x_{i+1})$.

1.a) Montrons que $\forall x \in F_{i+1}$, $u = x - p_i(x)$ est la projection orthogonale de x sur $F_{i+1} \cap F_i^\perp$.

D'après la caractérisation de la projection orthogonale, il suffit de montrer que :

$$i) \quad u \in F_{i+1} \cap F_i^\perp \quad ii) \quad x - u \in (F_{i+1} \cap F_i^\perp)^\perp.$$

$i)$ $p_i(x) \in F_i \subset F_{i+1}$ et $x \in F_{i+1}$, donc $u \in F_{i+1}$.

D'autre part, par définition de p_i , $u \in F_i^\perp$.

$ii)$ $F_{i+1} \cap F_i^\perp \subset F_i^\perp$, donc $F_i = (F_i^\perp)^\perp \subset (F_{i+1} \cap F_i^\perp)^\perp$, d'où $x - u = p_i(x) \in F_i \subset (F_{i+1} \cap F_i^\perp)^\perp$.

En particulier, u_{i+1} est la projection orthogonale de x_{i+1} sur $F_{i+1} \cap F_i^\perp$.

b) Comme $u_{i+1} \in F_i^\perp$ et $\forall k = 1 \dots i$, $u_k \in F_k \subset F_i$, alors $(u_{i+1} | u_k) = 0$.

Il en résulte que la famille $U = (u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale.

Remarque : il s'agit en fait de la famille déduite de X par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Montrons qu'aucun des u_i n'est nul.

- C'est évident pour $u_1 = x_1$.

- Si l'un des u_j était nul pour $j \geq 2$, alors on aurait $x_j = p_{j-1}(x_j) \in F_{j-1}$, donc x_j s'exprimerait comme combinaison linéaire des éléments x_1, \dots, x_{j-1} , ce qui contredit que X est libre.

Il en résulte immédiatement que $B_1 = \left(\frac{u_i}{\|u_i\|} \right)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ est une base orthonormée de F .

2. Notons $y_{i+1} = p_i(x_{i+1})$: ainsi $x_{i+1} = y_{i+1} + u_{i+1}$ avec $y_{i+1} \perp u_{i+1}$, donc $(x_{i+1} | u_{i+1}) = (u_{i+1} | u_{i+1}) = \|u_{i+1}\|^2 > 0$.

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|(x_{i+1} | u_{i+1})| \leq \|x_{i+1}\| \|u_{i+1}\|$.

Ainsi $0 < \frac{(x_{i+1} | u_{i+1})}{\|x_{i+1}\| \|u_{i+1}\|} \leq 1$.

Or la fonction \cos induit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, 1]$, donc il existe un unique réel $\alpha_i \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel

$$\text{que } \cos(\alpha_i) = \frac{(x_{i+1} | u_{i+1})}{\|x_{i+1}\| \|u_{i+1}\|}.$$

3. B_1 étant une base orthonormale de F , d'après **1-2.a)**, $G(X) = {}^t P_{B_1}(X) P_{B_1}(X)$, donc $\det(G(X)) = \det(P_{B_1}(X))^2$.

Or $P_{B_1}(X)$ est triangulaire supérieure. Comme $x_1 = u_1$, alors $p_{11} = \|u_1\|$ et pour $i \geq 2$, p_{ii} est égal à la i^e composante de x_i dans la base B_1 , c'est donc $(x_i | \frac{u_i}{\|u_i\|}) = \frac{(x_i | u_i)}{\|u_i\|} = \|x_i\| \cos(\alpha_{i-1})$.

$$\text{Ainsi } \det(G(X)) = \|u_1\|^2 \prod_{i=2}^p \|u_i\|^2 = \prod_{i=1}^p \|x_i\|^2 \cdot \prod_{j=1}^{p-1} \cos^2(\alpha_j).$$

L'inégalité $\det(G(X)) \leq \prod_{i=1}^p \|x_i\|^2$ est alors évidente.

Le cas d'égalité est celui où $\forall j = 1 \dots p-1$, $\cos^2(\alpha_j) = 1$, c'est à dire $|\cos(\alpha_j)| = 1$, soit encore $|(x_{j+1} | u_{j+1})| = \|u_{j+1}\| \|x_{j+1}\|$ qui représente le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz et a lieu si et seulement si u_{j+1} est colinéaire à x_{j+1} , c'est à dire si X est orthogonale.

D'ailleurs dans ce cas $G(X) = \text{Diag}(\|x_1\|^2, \dots, \|x_p\|^2)$.

Partie 3

Produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs en dimension n

1. L'égalité demandée est évidente si $x \in F$ car alors $d(x, F) = 0$ et $\det(G(x, x_1, \dots, x_p)) = 0$ (famille liée).

Supposons maintenant que $x \notin F$: alors (x_1, \dots, x_p, x) est libre et, d'après **1-1.c**), $\det(G(x, x_1, \dots, x_p)) = \det(G(x_1, \dots, x_p, x))$.

On construit par orthogonalisation une famille orthogonale $U' = (u_1, \dots, u_p, u)$ à partir de (x_1, \dots, x_p, x) libre, les u_i étant les mêmes que dans U , donc les α_i aussi.

En rajoutant $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{(x|u_p)}{\|x\| \|u_p\|}$, on obtient de même que :

$$\begin{aligned} \det(G(x, x_1, \dots, x_p)) &= \|x\|^2 \cos^2(\alpha) \prod_{i=1}^p \|x_i\|^2 \cdot \prod_{j=1}^{p-1} \cos^2(\alpha_j) = \|x\|^2 \cos^2(\alpha) \det(G(x_1, \dots, x_p)) \\ &= \|u\|^2 \det(G(x, x_1, \dots, x_p)) \quad (\text{car comme au } \mathbf{2-3}, \|u\| = \|x\| \cos \alpha). \end{aligned}$$

Or $u = x - P_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F^\perp , donc $\|u\| = d'(x, F)$.

$$\text{Ainsi } d(x, F)^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \dots, x_p))}{\det(G(x_1, \dots, x_p))}.$$

2. On sait que $\|x_1 \wedge x_2\|^2 = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \alpha$ avec $\cos \alpha = \frac{(x_1|x_2)}{\|x_1\| \|x_2\|}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } G(x_1, x_2) &= \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) \end{vmatrix} = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (x_1|x_2)^2 = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \alpha \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{\|x_1 \wedge x_2\|^2 = G(x_1, x_2)}.$$

- 3.a) $\dim E^* = \dim E = n..$

- b) Pour chaque $x \in E$, l'application $\theta(x) : y \mapsto (x|y)$ est linéaire de E vers \mathbf{R} , donc $\theta(x) \in E^*$.

$\theta : \underset{E}{x} \mapsto \underset{E^*}{\theta(x)}$ est linéaire car $\forall y \in E, \theta(\lambda x_1 + x_2)(y) = (\lambda x_1 + x_2|y) = \lambda(x_1|y) + (x_2|y) = \lambda \theta(x_1)(y) + \theta(x_2)(y)$, donc $\theta(\lambda x_1 + x_2) = \lambda \theta(x_1) + \theta(x_2)$.

θ est injective car si $x \in \text{Ker} \theta$, alors $\theta(x) = 0_{E^*}$, d'où $\theta(x)(x) = \|x\|^2 = 0$, donc $x = 0_E$.

Comme $\dim E = \dim E^*$, θ est un isomorphisme de E sur E^* (appelé isomorphisme canonique).

Conséquence : $\forall \varphi \in E^*, \exists ! z \in E / \forall y \in E, \varphi(y) = \theta(z)(y) = (z|y)$.

- c) Soit B une base orthonormée directe de E .

$\varphi : y \mapsto \det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, y))$ est une forme linéaire sur E car $y \mapsto P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ est linéaire et le déterminant est linéaire par rapport à sa dernière colonne.

Il suffit d'appliquer le **b)** pour déduire l'existence et l'unicité de z tel que :

$$\forall y \in E, \det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, y)) = (z|y).$$

4. Si X est une famille liée, alors $P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ n'est pas inversible car ses $n - 1$ premières colonnes sont liées, d'où $\forall y \in E, (z|y) = \det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, y)) = 0$. En particulier pour $y = z$, on trouve $\underline{v(X) = z = 0_E}$.

Si X est une famille libre, alors X est une base de F qui est donc de dimension $n - 1$. En prenant y non nul de F^\perp qui est une droite, alors (x_1, \dots, x_{n-1}, y) est une base de $F \oplus F^\perp = E$, donc $\det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, y)) \neq 0$, donc $(z|y) \neq 0$, d'où $\underline{v(X) = z \neq 0_E}$.

5. Pour montrer que $v(X)$ appartient à F^\perp , il suffit de montrer que $v(X)$ est orthogonal à tous les éléments de X , c'est à dire : $\forall i = 1 \dots n-1, (z|x_i) = 0$.

En effet : $(z|x_i) = \det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, x_i)) = 0$ (deux colonnes égales).

Si X est libre, alors $v(X) \neq 0_E$ et on a : $\det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, v(X))) = (v(X)|v(X)) = \|v(X)\|^2 > 0$, ce qui prouve à la fois que $(x_1, \dots, x_{n-1}, v(X))$ est une base de E et qu'elle est directe car de même sens que B elle-même directe.

Soit $y \in E = F \oplus F^\perp$: y se décompose en $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F$ et $y_2 \in F^\perp$; y_1 (resp. y_2) est la projection orthogonale de y sur F (resp. F^\perp).

Comme $\dim F = n-1$ car X est supposée libre, $\dim F^\perp = 1$, donc $v(X)$ (non nul) engendre la droite H^\perp .

On sait qu'alors $y_2 = \frac{(v(X)|y)}{(v(X)|v(X))} \cdot v(X)$ et $y_1 = y - y_2$.

6. D'après la question **1-2**), $G(X) = {}^t P_A(X) P_A(X)$ où $A = (e_1, \dots, e_{n-1})$ désigne une base orthonormée de F (de dimension $n-1$ car X est libre).

Donc $\det(G(X)) = \det(P_A(X))^2$.

Posons $w = \frac{v(X)}{\|v(X)\|}$: w est normé et est colinéaire à $v(X)$, donc est dans F^\perp ; alors $B = (e_1, \dots, e_{n-1}, w)$ est une base orthonormée de E .

$P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, w) = \begin{pmatrix} P_A(X) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, w)) = \det(P_A(X))$.

Or d'autre part, $\det(P_B(x_1, \dots, x_{n-1}, w)) = (v(X)|w) = \frac{(v(X)|v(X))}{\|v(X)\|} = \|v(X)\|$.

Ainsi $\|v(X)\|^2 = \det(G(x_1, \dots, x_{n-1}))$.

Remarque : cette solution n'utilise pas la question **1-3.5**).

