DS 10 : *Espaces vectoriels euclidiens*

Jeudi 17 Juin 2003

CORRIGÉ

$1^{\text{ère}}$ Partie

1. Pour cela il faut montrer que Φ est linéaire, ce qui simple en vérifiant l'égalité $\Phi(P+\lambda Q) = \Phi(P)+\lambda\Phi(Q) \quad \forall(P,Q)\in E^2; \forall\lambda\in\mathbb{R}$ et que $\Phi(P)\in E_n \quad \forall P\in E_n$, en effet : soit $P\in E_n$ donc $\deg P\leq n$ donc $\deg(\Phi(P)) = \deg\left(((X^2-1)P')'\right) = \deg\left(((X^2-1)P')\right)-1 = 2+\deg P'-1 = \deg P\leq n$, donc $\Phi(P)\in E_n$ et donc Φ induit un endomorphisme Φ_n de E_n .
2. Ecrire la matrice de $\Phi_n(1)=0, \Phi_n(X)=2X,\dots,\Phi_n(X^k) = ((X^2-1)kX^{k-1})' = k(X^{k+1}-X^{k-1})' = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2},\dots,\Phi_n(X^n) = n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2}$. Donc
$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & (k-1)k & \ddots & \\ & & \ddots & k(k+1) & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & (n-1)n \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$
3. $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur propre de $\Phi_n \Leftrightarrow M-\lambda I_n$ non inversible, or $M-\lambda I_n$ est une matrice triangulaire, donc serait non inversible si l'un des ses termes diagonaux $(\lambda-k(k+1))_{0\leq k\leq n}$ est nul, c'est à dire $\lambda\in\{0,2,\dots,k(k+1),\dots,n(n+1)\}$.
4. (a) $\mu_k = k(k+1)$, Soit $P(X) = a_0+a_1X+\ldots+a_nX_n\in E_n$ polynôme , en notant $Y = (a_i)_{0\leq i\leq n}\in\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ l'équation $\Phi_n(P) = \mu_kP$ s'écrit matriciellemnt $MY = \mu_kY$ ou bien $Y\in\ \mathrm{Ker}(M-\mu_kI_n)$, or $M-\mu_kI_n$ est une matrice triangulaire supérieure dont un seul terme est nul, donc de rang égal à $n-1$ et par suite $\dim\ \mathrm{Ker}(M-\mu_kI_n) = 1$, on peut donc conclure que les solutions de l'équation $\Phi_n(P) = \mu_kP$ sont tous proportionnels, et parmi ces solution il n'y a bien sûr qu'un seul un unique polynôme unitaire P_k tel que : $\Phi_n(P_k) = \mu_kP_k$.

   (b) Posons $\deg P_k = p$, donc $P_k(X) = a_0+a_1X+\ldots+a_pX_p$ avec $a_p\neq 0$, $\Phi_n(P_k) = \mu_kP_k \implies (X^2-1)P_k\text{"} + 2XP_k' = \mu_kP_k$, en identifiant dans cette égalité les coefficient de la plus grande puissance qui est X^p on trouve $a_p(p(p-1))+2p) = a_p\mu_k$ qui devient puisque $a_p\neq 0, \quad p(p+1) = k(k+1)$ ou bien $k^2-p^2 = p-k$. Si $p\neq k$ cette égalité devient aprés simplification par $p-k$, $k+p=-1$ ce qui est impossible, donc $\deg P_k = p = k$.
5. La symétrie, bilinéarité et positivité ne posent aucun probléme. Juste la notion de définie qui mérite un peu de rédaction, soit $P\in E$ tel que $(P|P) = 0$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1}P^2(t)dt = 0$, ainsi P^2 est une fonction continue positive d'intégrale nulle sur $[-1,1]$ donc $P^2 = 0$ et aussi $P = 0$ sur $[-1,1]$, on a donc un polynôme P qui admet une infinité de racines donc $P = 0$.

6. Pour tout $(P,Q)\in E^2$ on a : $(\Phi(P)|Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left((t^2-1)P'(t)\right)'Q(t)dt=\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{t=-1}^{t=1}-$ $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt=0-\left(\left[P(t)(t^2-1)Q'(t)\right]_{t=-1}^{t=1}-\int_{-1}^{1}P(t)\left((t^2-1)Q'(t)\right)'dt\right)=(P|\Phi(Q))$, on a procédé à deux reprises par une intégration par parties.

7. Pour tout couple (k,k') d'entiers naturels tel que $k\neq k'$, on a $(\Phi(P_k)|P_{k'})=(P_k)|\Phi(P_{k'}))\implies$ $\mu_k(P_k|P_{k'})=\mu_{k'}(P_k|P_{k'})\implies(\mu_k-\mu_{k'})(P_k|P_{k'})\implies(P_k|P_{k'})=0$, car $k\neq k'\implies\mu_k=k(k+1)\neq\mu_{k'}=k'(k'+1)$.

8. (a) D'aprés la question précédente la famille $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est othogonale, en plus tous ses éléments sont des polynômes non nuls car unitaires, donc c'est une famille libre, et elle est de carinal $n+1=\dim E_n$ donc c'est une base de E_n, pour en construire une base orthonormée $(R_0,R_1,\dots,R_n)$, comme la famille est déjà orthogonale il suffit de normaliser ses éléments en le divisant par sa norme, c'est à dire prendre $R_k=\dfrac{P_k}{||P_k||}$.

   (b) Soit $P\in E_n,\|P\|=1$, donc $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kR_k$ avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k^2=1$ car $(R_0,R_1,\dots,R_n)$ est une b.o.n de E_n, d'autre part $\forall\quad 0\le k\le n$ on a :
   $\Phi_n(R_k)=\Phi_n\left(\dfrac{P_k}{||P_k||}\right)=\dfrac{\Phi_n(P_k)}{||P_k||}=\dfrac{\mu_kP_k}{||P_k||}=\mu_kR_k$, ainsi
   $\Phi_n(P)=\Phi_n\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kR_k\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_n(R_k)=\sum_{k=0}^{n}a_k\mu_k(R_k)$, comme $(R_0,R_1,\dots,R_n)$ est une b.o.n de E_n alors $\|\Phi_n(P)\|=\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k^2\mu_k^2}\le\mu_n\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k^2}=\mu_n$ donc
   $|||\Phi_n|||=\sup\{\|\Phi_n(P)\|;P\in E_n,\|P\|=1\}\le\mu_n$.
   Inversement : $\|R_n\|=1$ donc $\|\Phi_n(R_n)\|=\mu_n\le|||\Phi_n|||=\sup\{\|\Phi_n(P)\|;P\in E_n,\|P\|=1\}$ d'où l'égalité .

2$^{\text{éme}}$ Partie

1. (a) $L_k=\dfrac{1}{2^kk!}U_k=\dfrac{1}{2^kk!}V_{k,k}=\dfrac{1}{2^kk!}[(X^2-1)^k]^{(k)}$, donc $\deg L_k=\deg\left([(X^2-1)^k]^{(k)}\right)=$ $\deg(X^2-1)^k-k=2k-k=k$, le coefficient dominant de L_k est obtenu en dérivant k fois la plus grande puissance de $(X^2-1)^k$ qui est X^{2k}, or $(X^{2k})^{(k)}=(2k)(2k-1)\dots(k+1)X^k=$ $\dfrac{(2k)!}{k!}X^k$, donc le coefficient dominant de L_k est $\dfrac{1}{2^kk!}\dfrac{(2k)!}{k!}=\dfrac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$.

   (b) Soit $k\in\mathbb{N}$ $\quad\left((X^2-1)^k\right)^{(k)}=\left((X-1)^k(X+1)^k\right)^{(k)}=$
   $\displaystyle\sum_{p=0}^{k}\mathcal{C}_k^p\left((X-1)^k\right)^{(p)}\left((X+1)^k\right)^{(k-p)}$ (*), or 1 est une racine de $(X-1)^k$ de multiplicité k donc $\left((X-1)^k\right)^{(p)}(X=1)=0$ pour tout $0\le p\le k-1$, donc en remplaçant dans (*) X par 1, on trouve
   $L_k(1)=\dfrac{1}{2^kk!}\mathcal{C}_k^k\left((X-1)^k\right)^{(k)}(X=1)\left((X+1)^k\right)^{(0)}(X=1)=1$.

   (c) Du fait que la dérivée d'un polynôme pair est impair et comme $(X^2-1)^k$ est pair, alors sa dérivée k-ème est impaire si k impair, et elle est paire si k est pair, on peut donc conclure que la parité du polynôme L_k est la même que celle de k .

   (d) $L_k(-1)=L_k(1)$ si k pair et $L_k(-1)=-L_k(1)$ si k impair .

2. (a) $V_{p,q}=\left((X^2-1)^p\right)^{(q)}$, or 1 et -1 sont des racine de $(X^2-1)^p$ de multiplicité p, donc pour $q<p$ alors $\left((X^2-1)^p\right)^q(1)=V_{p,q}(1)$ et de même $V_{p,q}(-1)=0$.

(b) Si $q > 2p$, on est dans la situation où l'ordre de la dérivée depasse le degré donc $V_{p,q} = 0$.

(c) En effectuant la première intégration par partie on a que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que :$p \neq q$ en supposant par exemple $p > q$; $\quad (U_p|U_q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q)} dt =$
$\left[\left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2-1)^q\right]^{(q)}\right]_{t=-1}^{t=1} - \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+1)} dt$
$= 0 - \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+1)} dt \; = - \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+1)} dt$
car $\left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} (t=1) = \left((t^2-1)^p\right)^{(p-1)} (t=-1) = 0$.
En En effectuant une deuxième intégration par partie on aura
$(U_p|U_q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p-2)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+2)} dt$, et ainsi de suite jusqu'à avoir $(U_p|U_q) =$
$(-1)^p \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(0)} \left((t^2-1)^q\right)^{(q+p)} dt = 0$ car $\left((t^2-1)^q\right)^{(q+p)} = 0$ puisque l'ordre de dérivée qui est ici $q+p$ dépasse le degré qui est ici $2q$, notez bien qu'on a supposé au départ $p > q$, le raisonnement sera pareil si l'on suppose $q > p$.

3. On déduit de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(U_0, U_1, \ldots, U_k)$ est une famille orthogonale donc la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une famille orthogonale or $\forall 0 \leq p \leq k; \deg L_p = p \leq k$, donc c'est une famille orthogonale de E_k, tous ses éléments sont non nuls donc est libre et comme sont cardinal est $k+1 = \dim E_k$ alors c'est une base orthogonale de E_k.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, on a : $(XL_n|L_k) = \displaystyle\int_{-1}^{1} tL_n(t)L_k(t)dt =$
$\dfrac{1}{2^n n! 2^k k!} \displaystyle\int_{-1}^{1} t\left((t^2-1)^n\right)^{(n)} \left((t^2-1)^k\right)^{(k)} (t)dt$
$= \dfrac{1}{2^n n! 2^k k!} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n)} t\left((t^2-1)^k\right)^{(k)} (t)dt = (L_n|XL_k)$.
Or L_n est orthogonal à tous les $(L_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ qui forment une base de E_{n-1} donc sera orthogonal à tout élément de XL_k qui est un polynôme de degré $k+1 \leq n-1$, d'où $(XL_n|L_k) = 0$.

(b) D'aprés les questions précédentes L_{n+1}, L_n, L_{n-1} est une base de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1}, et d'aprés la question précédente XL_n est un élément de E_{n+1} orthogonal à tous les $(L_k)_{0 \leq k \leq n-2}$ qui forment une base de E_{n-2}, donc XL_n est un élément de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1} et va alors s'écrire comme combinaison linéaire de L_{n+1}, L_n, L_{n-1}.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XL_n = aL_{n+1} + bL_n + cL_{n-1}$, d'autre part $\deg L_k = k$ donc $a \neq 0$ et alors $L_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n)L_n + \gamma_n L_{n-1}$ avec $(\alpha_n = \frac{1}{a}, \beta_n = -\frac{b}{a}, \gamma_n = -\frac{c}{a}) \in \mathbb{R}^3$

5. (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (X^2-1)W'_n = (X^2-1)(X^2-1)^{n\prime} = (X^2-1)2nX(X^2-1)^{n-1} = 2nXW_n$.

(b) En dérivant $(n+1)$-fois l'expression précèdente, on obtient aprés avoir utilisé la formule de Leibniz : $\left((X^2-1)W'_n\right)^{n+1} = 2n\left(XW_n\right)^{n+1}$ qui devient
$\displaystyle\sum_{p=0}^{n+1} \mathcal{C}_{n+1}^p (X^2-1)^{(p)}(W'_n)^{(n+1-p)} = 2n \sum_{p=0}^{n+1} \mathcal{C}_{n+1}^p X^{(p)} W_n^{(n+1-p)}$, or $(X^2-1)^{(p)} = 0$ pour $p \geq 3$ et $X^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$, on obtient donc
$W_n^{(n+2)} + (n+1)2XW_n^{(n+1)} + n(n+1)W_n^{(n)} = 2nXW_n^{(n+1)} + 2n(n+1)W_n^{(n)}$ ou bien $\Phi_n(W_n) = (X^2-1)W_n^{(n)\prime\prime} + (n+1)2XW_n^{(n)\prime} + n(n+1)W_n^{(n)} = 2nXW_n^{(n)\prime} + 2n(n+1)W_n^{(n)}$, ou encore $\Phi_n(W_n) = (X^2-1)W_n^{(n)\prime\prime} + 2XW_n^{(n)\prime} = n(n+1)W_n^{(n)}$ or par définition

$W_n^{(n)} = n!2^n L_n$ et comme Φ_n est linéaire alors : $\Phi_n(L_n) = n(n+1)L_n$.

(c) D'aprés la question 4.a il existe un unique polynôme unitaire P_n tel que : $\Phi_n(P_n) = n(n+1)P_n$, et d'aprés la question précédente $\dfrac{L_n}{\text{co}(L_n)}$ est aussi un polynôme unitaire tel que : $\Phi_n\left(\dfrac{L_n}{\text{co}(L_n)}\right) = n(n+1)\dfrac{L_n}{\text{co}(L_n)}$, donc $P_n = \dfrac{L_n}{\text{co}(L_n)}$ et on peut en conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $L_n = a_n P_n$, avec $a_n = \text{co}(L_n)$, or $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$, donc :
$a_n = \text{co}(L_n) = \dfrac{1}{2^n n!}\times$coefficient de $(X^{2n})^{(n)} = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{(2n)!}{n!} = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

6. (a) $\forall k \in \mathbb{N}$ on a $(X|L_k L_k') = \displaystyle\int_{-1}^{1} tL_k(t)L_k'(t)dt = \frac{1}{2}\left[tL_k^2(t)\right]_{t=-1}^{t=1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_k^2(t)dt$
$= 1 - \dfrac{1}{2}\|L_k\|^2$ car $L_k(1) = 1, L_k(-1) = \mp 1$.

(b) Soit $k \geq 1, \deg L_k = k$, posons $L_k = a_k X^k + \ldots + a_0$ alors $XL_k' = ka_k X^k + \ldots + a_1 X, kL_k = ka_k X^k + \ldots + ka_0$, en faisant la différence on obtient que : $XL_k' - kL_k$ est un polynôme de degré $\leq k-1$, c'est à dire $XL_k' - kL_k \in E_{k-1}$.
D'autre part L_k est orthogonal à tout polynôme de degré $\leq k-1$, en particulier à $XL_k' - kL_k$, donc $(XL_k' - kL_k|L_k) = 0$ ou bien $(XL_k'|L_k) = k(L_k|L_k) = k\|L_k\|^2$, mais ceci pour $k \geq 1$, pour $k = 0$ l'égalité est triviale puisque L_0 est un polynôme constant. Donc on conclut que : $\forall k \in \mathbb{N}, (XL_k'|L_k) = k\|L_k\|^2$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\|L_k\|^2 = \frac{1}{k}(XL_k'|L_k) = \frac{1}{k}\int_{-1}^{1} tL_k'(t)L_k(t)dt = \frac{1}{k}\int_{-1}^{1} tL_k(t)L_k'(t)dt = \frac{1}{k}(X|L_k L_k') = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\|L_k\|^2\right)$, ce qui donne $(2k+1)\|L_k\|^2 = 2$, d'où $\|L_k\|^2 = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$.

(d) D'aprés la question 5.5. L_k est un polynôme de degré k de coefficient dominant $\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$, donc $(k+1)L_{k+1} = (k+1)\frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!^2}X^{k+1} + \ldots + \alpha_0 = (k+1)2(k+1)\frac{(2k+1)!}{2^{k+1}(k+1)!^2}X^{k+1} + \ldots + \alpha_0 = \frac{(2k+1)!}{2^k(k)!^2}X^{k+1} + \ldots + \alpha_0$ et $(2k+1)XL_k = (2k+1)\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}X^{k+1} + \ldots + \beta_0 = \frac{(2k+1)!}{2^k(k!)^2}X^{k+1} + \ldots + \beta_0$, en faisant la différence on a bien $(k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k$ est un polynôme de degré $\leq k$, d'autre part d'aprés la question 4.a XL_k est orthogonal à E_{k-2}, et L_{k+1} aussi, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k$ est un polynôme de degré $\leq k$, orthogonal à E_{k-2}, et par suite s'écrit sous la forme :
$(k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k = \alpha L_{k-1} + \beta L_k$ avec $\alpha = \frac{((k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k|L_{k-1})}{\|L_{k-1}\|^2} = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(XL_k|L_{k-1}) = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k)}tL_{k-1}dt$, moyennant des intégration par parties successives où tout les crochets sont nul puisque $\left[((t^2-1)^k)^{(p)}\right]_{t=-1}^{t=1} \quad \forall p < q$ vu que -1 et 1 sont des racines de $(t^2-1)^k)$ de multiplicité k on a : $\alpha = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(-1)^k\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k(tL_{k-1})^{(k)}dt$. Or tL_{k-1} est un polynôme de degré k donc $(tL_{k-1})^{(k)} = k!\ \text{co}(tL_{k-1}) = k!\ \text{co}(L_{k-1}) = k!\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$, donc $\alpha = \frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2}(-1)^{k+1}k!\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k dt$
$= (-1)^{k+1}\frac{(2k+1)!}{2^{k-1}k!(2k-1)}I_k$ où $I_k = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^k dt$, dit intégrale de Wallis, on montre par récurrence que : $(-1)^{k+1}\frac{(2k+1)!}{2^{k-1}k!(2k-1)}I_k = (2k+1)$.
De même $\beta = \frac{((k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k|L_k)}{\|L_k\|^2} = -\frac{(2k+1)XL_k|L_k)}{\|L_k\|^2} = -\frac{1}{\|L_k\|^2}\int_{-1}^{1} tL_k^2(t)dt = 0$ car la fonction $t \mapsto tL_k^2(t)$ est impaire sur $[-1,1]$ donc son intégrale est nulle, donc on conclut que : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)L_{k+1} = (2k+1)XL_k - kL_{k-1}$.