

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ إِعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

Corrigé DS 9 (07-08) : *Algèbres linéaire*
Algèbre euclidienne

Mercredi 04 Juin 2008.

Durée : 4 heures

EXERCICE

- 1) Evident car $A^3 + A = 0$
- 2) a) u injectif donc bijectif car endomorphisme en dimension finie, donc A inversible, en multipliant l'égalité $A^3 + A = 0$ par A^{-1} , on en déduit que $A^2 = -I_3$, d'où $u^2 = -id_E$. Donc $\det(u^2) = \det(-id_E)$, d'où $\det(u)^2 = -1$, impossible car $\det u \in \mathbb{R}$.
b) u n'est pas injective, donc $0 \neq \ker u \subset \mathbb{R}^3$, d'où $\dim \ker u \in \{1, 2\}$.
- 3) $x \in \ker u \cap \ker(u^2 + id_E) \implies u(x) = u^2(x) + x = 0 \implies x = 0$. D'autre part $\forall x \in E$, on a : $u^3(x) + u(x) = 0$, donc $x + u(x) \in \ker u$ et $-u(x) \in \ker(u^2 + id_E)$, avec $x = x + u(x) - u(x)$, d'où $E = \ker u \oplus \ker(u^2 + id_E)$. On a $\dim E = 3$, $\dim \ker u \in \{1, 2\}$, d'où $\ker(u^2 + id_E) \in \{1, 2\}$.
- 4) a) $x \in F = \ker(u^2 + id_E) \implies u^2(x) = -x \implies (u^2 + id_E)u(x) = u^3(x) + u(x) = u(u^2(x) + x) = u(0) = 0 \implies u(x) \in \ker(u^2 + id_E) = F$, d'où F est stable par u .
b) $\forall x \in F = \ker(u^2 + id_E)$ on a $v^2(x) = u^2(x) = -x$, donc $v^2 = -id_F$.
c) Posons $r = \dim F$, donc $\det v^2 = (-1)^r$, or $\det(v^2) = (\det v)^2 \geq 0$, d'où r pair avec $r \in \{1, 2\}$, donc $r = 2$.
d) Supposons que v admet une valeur propre réelle, λ , donc $\exists x \neq 0$ tel que $v(x) = \lambda x$, d'où $v^2(x) = \lambda^2 x = -x$, d'où $\lambda^2 = -1$, impossible.
- 5) a) $\text{card}\{e'_2, e'_3\} = 2 = \dim F$, il suffit de montrer qu'elle est libre, en effet supposons que $\alpha e'_2 + \beta e'_3 = 0$, or $e'_3 = u(u'_2)$, donc $\alpha u(e'_2) + \beta u^2(e'_3) = 0$, donc $\alpha e'_3 - \beta e'_3 = 0$, car $u = v$ sur F et $v^2 = -id_F$, ainsi $\alpha = \beta$, d'où $\alpha(e'_2 + u(e'_2)) = 0$, d'autre part $u(e'_2) \neq -e'_2$ car $u = v$ sur F n'admet pas de valeurs propres, donc $\alpha = \beta = 0$.
b) $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ base de E , car $E = \ker u \oplus F$. De plus $u(e'_1) = 0, u(e'_2) = e'_3, u(e'_3) = u^2(e'_2) = -e'_2$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
c) A et B semblables car matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

PROBLÈME

Première Partie

- 1) a) $p \circ p(x) = p((u|x)u) = (u|x)p(u) = (u|x)(u|u)u = p(x)$ car $(u|u) = \|u\|^2 = 1$.
 b) $x \in \ker p \iff p(x) = (x|u)u = 0 \iff (x|u) = 0$ (car $u \neq 0 \iff x \in u^\perp$).
 $x \in \text{Imp } p \iff p(x) = x$ (car p projecteur) $\iff x = \lambda u$ où $\lambda = (x|u)$ $\iff x \in \text{Vect}(u)$. Donc p est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)$.
 c) $(p(x)|y) = (x|u)(u|y) = (x|p(y))$ donc p est symétrique et $(p(x)|x) = (u|x)^2$, donc p est positif.
 d) p est un projecteur orthogonale, ses seuls valeurs propres sont 0 et 1, donc les sous-espaces propres associés sont $\ker p = \text{Vect}(u)^\perp$ et $\text{Imp } p = \text{Vect}(u)$ qui forment une somme directe dans E , donc p est diagonalisable.
- 2) a) Tout calcul fait les coefficients de la matrice $U^t U$ sont les $u_i u_j$.
 b) Les coefficients de la matrice de p dans la b.o.n \mathcal{B}_E sont donnés par la formule $a_{i,j} = (p(e_i)|e_j)$ or $p(e_i) = (e_i|u)u = u_i u$, d'où $a_{i,j} = u_i (u|e_j) = u_i u_j$, coefficient de $U^t U$. Donc la matrice de p dans la b.o.n n'est autre que $U^t U$.
- 3) a) Pour $\alpha = 0$, $f_\alpha = id_E$ est un automorphisme. Pour $\alpha \neq 0$, $\det(f_\alpha) = \det(id_E + \alpha p) = \alpha^n \det(p + \frac{id_E}{\alpha}) \neq 0 \iff -\frac{1}{\alpha}$ n'est pas valeur propre de $p \iff -\frac{1}{\alpha} \neq 1$, donc f_α automorphisme si et seulement si $\alpha \neq -1$.
 b) $G \subset \text{Aut}(E)$ qui est un groupe pour la loi \circ , il suffit donc de montrer que c'est un sous-groupe. D'abord $id_E \in G$ pour $\alpha = 0$, d'autre part $f_\alpha \circ f_\beta = (id_E + \alpha p) \cdot (id_E + \beta p) = id_E + (\alpha + \beta + \alpha\beta)p \in G$. Enfin $f_\alpha \circ f_\beta = id_E$ pour β tel que $\alpha + \beta + \alpha\beta = 0$, i.e., $(f_\alpha)^{-1} = f_\beta \in G$ où $\beta = -\frac{\alpha}{1 + \alpha}$.
 c) $f \in G \cap O(E) \iff f = f_\alpha$ tel que $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 \forall x \in E$. or $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x + \alpha p(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|p(x)) + \alpha^2 \|p(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|u)^2 + \alpha^2 (x|u)^2$, donc $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 \iff \alpha(x|u)^2(2 + \alpha) = 0, \forall x \in E \iff \alpha \in \{0, -2\}$ ou bien $(x|u) = 0 \forall x \in E$, i.e., $u = 0$ (impossible). Donc $G \cap O(E) = \{f_0 = id_E, f_{-2} = id_E - 2p\}$, donc $\frac{-f_{-2} + id_E}{2} = p$, d'où $-f_{-2}$ est la symétrie orthogonale par rapport $\text{Vect}(u)$, et donc f_{-2} est la symétrie orthogonale par rapport $\text{Vect}(u)^\perp$.
- 4) a) p étant diagonalisable, sa matrice est donc de la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale formée par des -1 et des 1. La matrice de $f_\alpha = id_E + \alpha p$ est donc de la forme $I_n + \alpha PDP^{-1} = P(I_n + \alpha D)P^{-1}$ où $I_n + \alpha D$ est une matrice diagonale formée par des $1 + \alpha$ et des $1 - \alpha$ qui sont donc les valeurs propres possible de f_α . Le sous espace propre associé à $1 + \alpha$ est $\ker(f_\alpha - (1 + \alpha)id_E) = \ker(\alpha(p - id_E)) = \ker(p - id_E) = \text{Imp } p = \text{Vect}(u)$. Le sous espace propre associé à $1 - \alpha$ est $\ker(f_\alpha - (1 - \alpha)id_E) = \ker((\alpha + 1)p) = \ker p = \text{Vect}(u)^\perp$. En particulier $P_p(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1} (\lambda - 1)$.
 b) $P_{f_\alpha}(\lambda) = \det(f_\alpha - \lambda id_E) = \det(\alpha p - (\lambda - 1)id_E) = \alpha^n \det(p - \frac{\lambda-1}{\alpha} id_E) = \alpha^n P_p(\frac{\lambda-1}{\alpha}) = \alpha^n (-1)^n (\frac{\lambda-1}{\alpha})^{n-1} (\frac{\lambda-1}{\alpha} - 1) = (-1)^n (\lambda - 1)^{n-1} (\lambda - 1 - \alpha)$.
 c) Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a déjà vu que $\|f_\alpha(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha(x|u)^2 + \alpha^2 (x|u)^2 \leq 1 + 2\alpha + \alpha^2 = (1 + \alpha)^2$, car $(u|x) \leq \|u\| \|x\| = 1$, donc $\|f_\alpha\| \leq |1 + \alpha|$. D'autre part $\|f_\alpha\| \geq \|f_\alpha(u)\| = |1 + \alpha|$. D'où égalité.

- 5) a) Soit U la colonne formée par des $\frac{1}{\sqrt{n}}$, on a $J_n = nU^tU$, soit V une autre colonne telle que $J_n = nV^tV$, d'où $U^tU = V^tV$. Or ${}^tUU = 1$, de même que pour V (simple calcul), donc $U^tUV = V^tVU$, i.e., $V = \lambda U$ or $\|U\| = \|V\| = 1$, d'où $V = \pm U$.
- b) $aI_n + bJ_n = a(I_n + \frac{nb}{a}U^tU)$, or U^tU n'est autre que la projection orthogonale sur u de coordonnées U , donc $g = af_{\frac{nb}{a}}$. Les valeurs propres de $f_{\frac{nb}{a}}$ sont $1 + \frac{nb}{a}$ et $1 - \frac{nb}{a}$, celles de $g = af_{\frac{nb}{a}}$ sont donc $a + nb$ et $a - nb$. Le polynôme caractéristique de g est $P_g(\lambda) = \det(af_{\frac{nb}{a}} - \lambda id_E) = a^n \det(f_{\frac{nb}{a}} - \frac{\lambda}{a} id_E) = a^n P_{f_{\frac{nb}{a}}}(\frac{\lambda}{a}) = a^n (-1)^n (\frac{\lambda}{a} - 1)^{n-1} (\frac{\lambda}{a} - 1 - \frac{nb}{a}) = (-1)^n (\lambda - a)^{n-1} (\lambda - a - nb)$. les sous-espaces propres associés sont les ceux de f_α , c'est à dire $\text{Vect}u$ et $(\text{Vect}u)^\perp$.

Deuxième Partie

- 1) a) Car h est diagonalisable dans une b.o.n, puisque symétrique.
- b) Supposons que h est positif, et soit λ une valeur propre de h de vecteur propre associé x , donc $h(x) = \lambda x$ et $(h(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2 \geq 0$, d'où $\lambda \geq 0$. Inversement supposons que toutes les valeurs propres λ_i de h soient positives, et soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la base de h dans une b.o.n formée de vecteurs propres. Soit $x \in E$ et $X = (x_i)$ la colonne formé par les coordonnées de x dans cette même b.o.n, alors $(h(x)|x) = {}^t XDX = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^2 \geq 0$, donc h est positif.

- 2) a) La linéarité de \tilde{f} découle de celle à droite du produit scalaire.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \forall 1 \leq j \leq m, \text{ on a : } & \langle \tilde{f}(x), e'_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^m (f(e'_k)|x) e'_k, e'_j \rangle \\ & = \sum_{k=1}^m (f(e'_k)|x) \underbrace{\langle e'_k, e'_j \rangle}_{\text{null si } k \neq j} \\ & = (f(e'_j)|x) \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vérifiée sur les éléments de la base (e'_j) , donc vérifiée par linéarité pour tout élément $y \in F$.

Unicité : Soit \tilde{f}_1 une autre application linéaire vérifiant la même propriété que \tilde{f} , donc $\langle \tilde{f}(x), y \rangle = \langle \tilde{f}_1(x), y \rangle \quad \forall y \in E$, d'où $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall x \in E$.

- b) $\langle \tilde{f} \circ f(x), y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle f(y), f(x) \rangle = \langle \tilde{f} \circ f(y), x \rangle = \langle x, \tilde{f} \circ f(y) \rangle$, donc $\tilde{f} \circ f$ est symétrique, d'autre part $\langle \tilde{f} \circ f(x), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0$, donc $\tilde{f} \circ f$ est positif.

- c) $x \in \ker \tilde{f} \iff \tilde{f}(x) = 0 \iff \langle \tilde{f}(x), y \rangle = 0, \forall y \in F$
 $\iff (x|f(y)) = 0, \forall y \in F$
 $\iff (x|z) = 0, \forall z \in \text{Im}f$
 $\iff x \in (\text{Im}f)^\perp$

Donc $\ker \tilde{f} = (\text{Im}f)^\perp$. D'autre part, il est clair que $\ker f \subset \ker(\tilde{f} \circ f)$, inversement :

$$\begin{aligned} x \in \ker \tilde{f} \circ f & \implies \tilde{f} \circ f(x) = 0 \\ & \implies \langle \tilde{f} \circ f(x), x \rangle = 0 \\ & \implies \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2 = 0 \\ & \implies f(x) = 0 \\ & \implies x \in \ker f \end{aligned}$$

D'où l'autre inclusion.

- d) $\text{rg}(\tilde{f} \circ f) = \text{rg}f$ découle du fait que $\ker f = \ker(\tilde{f} \circ f)$, $\text{rg}(f) \leq \min(n, m)$ découle du fait que $f : F \rightarrow E$ est linéaire, avec $\dim E = n$ et $\dim F = m$.
- e) Les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice sont donnés par la formule suivante : $a_{i,j} = \langle f(e'_j), e_i \rangle$
- Les coefficients $\tilde{a}_{i,j}$ sont donnés par la formule : $\tilde{a}_{i,j} = (\tilde{f}(e_j)|e'_i) = \langle e'_j, f(e_i) \rangle = a_{j,i}$. Donc la matrice associée à \tilde{f} n'est autre que tA .
 - La matrice associée à $\tilde{f} \circ f$ est donc ${}^tA.A$.

- 3) a) Avec la notation $f(e'_k) = u_k$, on a $\forall x \in E$, $\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^m (u_k|x)e'_k$, donc

$$f \circ \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^m (u_k|x)f(e'_k) = \sum_{k=1}^m (u_k|x)u_k = \sum_{k=1}^m p_k(x), \text{ d'où } f \circ \tilde{f} = \sum_{k=1}^m p_k.$$

- b) $f \circ \tilde{f}$ est symétrique, en tant que somme d'endomorphisme symétriques. D'autre part $\forall x \in E$, on a : $(f \circ \tilde{f}(x)|x) = \langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) \rangle = \|\tilde{f}(x)\|^2 \geq 0$, donc $f \circ \tilde{f}$ est positif.
- c) Soit λ une valeur propre non nulle de $f \circ \tilde{f}$, donc $\exists x \neq 0$ tel que $f \circ \tilde{f}(x) = \lambda x$, en composant à gauche par \tilde{f} , on trouve $\tilde{f} \circ f(y) = \lambda y$ où $y = \tilde{f}(x) \neq 0$, car sinon $y = \tilde{f}(x) = 0 \implies f \circ \tilde{f}(x) = \lambda x = 0$ (impossible, puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$). Pareil pour la réciproque.

- d) On a $f \circ \tilde{f}(e'_j) = \sum_{k=1}^m (u_k|e'_j)f(e'_k) = \sum_{k=1}^m (u_k|e'_j)u_k$, or les coefficients de la matrice

$$G \text{ sont donnés par la formule } (f \circ \tilde{f}(e'_j)|e'_i) = \sum_{k=1}^m (u_k|e'_j)(u_k|e'_i), \text{ ainsi de } G = B^t B$$

où B est la matrice de coefficients $(u_i|e'_j)$ c-à-d dont les colonnes sont exactement les u_k , et on a déjà vu dans la question II,2,d que $G = {}^tA.A$.

- e) $\text{rg}G = \text{rg}f$ est déjà traité dans la question II,2,d. 0 est une valeur propre de $f \circ \tilde{f} \iff \det G = 0 \iff \text{rg}G = \text{rg}B \neq m$, i.e., les colonnes (u_1, \dots, u_m) sont liés.

- 4) a) Les coefficients de la matrice B sont donnés par la formule du cours : $b_{i,j} =$

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{a_{k,i}a_{k,j}}_{\text{null si } i > k \text{ ou } j > k} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1 = \min(i, j), \text{ donc } B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

- b) Prendre ${}^t u_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ${}^t u_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $u_m = (1, \dots, 1)$.
- c) 0 ne peut pas être une valeur propre de G , car la famille (u_1, \dots, u_m) est libre, puisque elle forme la matrice inversible U tel que $U^t U = B$ où ${}^t U =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fin.