CONTRÔLE : *Developpements limités. Fonctions convexes.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Lundi 8 Janvier 2007.
Durée: 1 heure.

Developpements limités.

Exercice 1. .

1) *(0.5 point) Calculer* $\lim\limits_{+\infty}\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.
2) *(0.5 point) Étudier l'asymptote en* $+\infty$*, équation et position, pour la fonction* $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}$.

Exercice 2. .

1) *(0.5 point) Soit* $n\in\mathbb{N}$*, montrer que l'équation* $\tan x = x$*, admet une solution unique l'ntervalle* $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$
2) *(0.25 point) Montrer que* $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.
3) *(0.25 point) Montrer que* $x_n = n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.
4) *(0.5 point) En déduire que* $x_n = n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n\pi}+\dfrac{1}{n\pi^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Fonctions convexes.

Exercice 3. .

1) *(0.25 point) Montrer que l'application :* $\begin{array}{rccl} f: &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(\ln x)\end{array}$ *est concave sur* $]1,+\infty[$.
2) *(0.75 point) En déduire que :* $\forall x,y\in]1,+\infty[:\quad \sqrt{\ln x\ln y}\leq \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

Exercice 4. .

1) *(0.25 point) Montrer que l'application :* $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(1+\mathrm{e}^x)\end{array}$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.
2) *(0.5 point) En déduire que :*
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall(x_i)_{1\leq i\leq n}\in(\mathbb{R}_+^*)^n$:
$$1+\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(\prod_{i=1}^n(1+x_i)\right)^{\frac{1}{n}}.$$
3) *(0.75 point) En déduire que :*
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall(x_i)_{1\leq i\leq n}\in(\mathbb{R}_+^*)^n,\forall(y_i)_{1\leq i\leq n}\in(\mathbb{R}_+^*)^n$:
$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(\prod_{i=1}^n(x_i+y_i)\right)^{\frac{1}{n}}.$$