Devoir Libre : *Fonctions réelles.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Étude des sommes partielles de l'exponentielle.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ **on pose :** $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

1) ***Comparaison de*** $f_n(x), e^x$.
   a) **Calculer** $f'_n(x)$.
   b) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0$ **on a** $f_n(x) \leq e^x$.
   Indication : On pourra raisonner par récurrence.
   c) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x < 0$ **on a** $f_{2n+1}(x) \leq e^x \leq f_{2n}(x)$
   Indication : On pourra raisonner par récurrence.
2) ***Étude de l'équation*** $f_n(x) = 0$
   a) **En déduire de ce qui précéde le signe de** $f_{2n}(x)$ **sur** $\mathbb{R}$ **puis l'ensemble de solution de l'équation** $f_{2n}(x) = 0$ **sur** $\mathbb{R}$.
   b) **En déduire que l'équation** $f_{2n+1}(x) = 0$ **admet une unique solution dans** $\mathbb{R}$ **que l'on notera dans la suite** x_n.
   c) **Calculer** x_0.
   d) **Montrer que** $x_n < 0$.
   e) **En déduire les tableaux de variations de** f_{2n}, f_{2n+1}
   f) **Dessiner les courbes reoresentatives de** f_{2n}, f_{2n+1} **dans un meme repère.**
3) ***Cas particulier : Etude de l'équation*** $f_3(x) = 0$
   a) **Montrer que** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_3(x) = 0 \Leftrightarrow g(t) = 0$ **où** $t = x + 1, g(t) = t^3 + 3t + 2$
   b) **En déduire que l'équation** $t^3 + 3t + 2 = 0$ **admet une solution unique que l'on notera** r
   c) **Soient** $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ **solutions de** $X^2 - rX - 1 = 0$. **Montrer que** $g(u + v) = 0$, **en deéduire** $u^3 + v^3, u^3v^3$
   d) **En déduire** u^3, v^3 **puis** u, v.
   Exprimer enfin r **puis** x_1 **en fonction de** $\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1$.
4) ***Étude de la suite*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   a) **Déterminer le signe de** $f_{2n+1}(-2n - 1)$.
   En déduire que $-2n - 1 \leq x_n$.
   Indication : On pourra regrouper les termes dans la somme deux à deux
   b) **Étudier le signe de** $f_{2n+3}(x_n)$ **en déduire que** (x_n) **monotone, soit** l **sa limite,** $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
   c) **Montrer que :** $0 \leq e^{x_n} \leq -\dfrac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
   Indication : On pourra utiliser la Partie 1).
   d) **On suppose que** $l \in \mathbb{R}$, **montrer que** $l \leq 0$, **puis que** $-\dfrac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq -\dfrac{l^{2n+1}}{(2n+1)!}$
   e) **En déduire une contradiction puis que** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

Fin.