DL 16

fcts réelles

1) a) on pose $f_p(x) = \varphi_p(x) - 1$, $f_p(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} f_p = +\infty$

TVI $\Rightarrow$ existence, $f_p' > 0 \Rightarrow$ unicité

b) $f_p(0) f_p(1) \leq 0 \Rightarrow x_p \in]0,1]$, $\varphi_p(x) = x\left(\frac{1-x^p}{1-x}\right)$

et $\varphi_p(x_p) = 1$

c) $f_{p+1}(x) - f_p(x) = x^{p+1} \Rightarrow f_{p+1}(x_p) = x_p^{p+1} > 0 = f_{p+1}(x_{p+1}) \Rightarrow x_p > x_{p+1}$

x_p minoré par 0 converge

d) $x_2 < 1 \Rightarrow x_p^p < x_2^p \longrightarrow 0$

2) a) On a pour $x = x_p$: $x + \dots + x^p = 1$ donc $1 + \dots + x^{p-1} = \frac{1}{x}$

donc $\frac{1-x^p}{1-x} = \frac{1}{x}$ donc $1 - x^p = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$

donc $x^p = 2 - \frac{1}{x}$ donc $x_p^{p+1} = 2x_p - 1$

d'où $\frac{1}{2^{p+1}}(1+\varepsilon_p)^{p+1} = \varepsilon_p$ donc $(1+\varepsilon_p)^{p+1} = 2^{p+1}\varepsilon_p$

puis on passe au log et on multiplie par ε_p

pour obtenir la relation $(p+1)\varepsilon_p \ln(1+\varepsilon_p) = (p+1)\varepsilon_p \ln 2 + \varepsilon_p \ln \varepsilon_p$

b) ~~On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$~~ ??

~~donc $(p+1)\varepsilon_p \sim (p+1)\varepsilon_p \frac{\ln(1+\varepsilon_p)}{\varepsilon_p} = (p+1)\ln 2 + \ln \varepsilon_p \longrightarrow +\infty$~~

On a $(p+1)\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_p \ln \varepsilon_p}{\ln(1+\varepsilon_p) - \ln 2} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

$\ln(1+\varepsilon_p)^{p+1} = (p+1)\ln(1+\varepsilon_p) \sim (p+1)\varepsilon_p \longrightarrow 0$

donc $(1+\varepsilon_p)^{p+1} \longrightarrow 1$

c) On a donc $2^{p+1}\varepsilon_p \to 1$ d'où $\varepsilon_p \sim \frac{1}{2^{p+1}}$

3. a) On a $\alpha + \alpha^2 = 1$ donc $\alpha + 1 = \frac{1}{\alpha}$ d'où $f(\alpha) = \alpha$

3.b) $\frac{1}{2} \le x \le 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \le 1+x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x} \le \frac{2}{3} \le 1$

3.c) $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)|\,|u_n - \alpha|$ TAF

$|f'(x)| = \left|\frac{-1}{(1+x)^2}\right| \le \frac{2}{3}$ car $\frac{1}{2} \le x \le 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \le 1+x \le 2$

$\frac{9}{4} \le (1+x)^2 \le 2$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} \le \frac{4}{9} \le \frac{2}{3}$

3.d) $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |u_1 - \alpha|$ par récurrence

$u_1 = \frac{1}{2}$, α sol de $x + x^2 = 1$, $\alpha > 0$

donc $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

et $|u_1 - \alpha| = \left|\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right| \le \frac{2}{3}$

donc $\lim_{+\infty} u_n = \alpha$

4) $g(\beta) = \beta$

a) $g'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2} < 0$

x	0		$+\infty$
g	1	$\searrow$	0

$g(x) \in [0,1]$ $\forall x > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $v_0 = 1$

donc $v_n = g(v_{n-1}) \in [0,1]$

b) $v_{2n} = g\circ g(v_{2n-2})$ et $g \circ g$ est $\nearrow$ il suffit de comparer v_0 et v_2, $v_0 = 1$ et $v_2 \in [0,1]$

donc v_{2n} est $\searrow$

de m̂ v_{2n+1} $\nearrow$ et bornés donc cvge

4.c $v_{2n+1} = g(v_{2n})$
$v_{2n} = g(v_{2n-1})$
en passage à la limite et comme g est cont on a $g(l) = l'$ et $g(l') = l$

4.d On a $g\circ g(\ell)=\ell$ donc $\dfrac{1}{\frac{1}{(\ell^2+\ell+1)^2}+\frac{1}{\ell^2+\ell+1}+1}=\ell$

donc $\dfrac{(\ell^2+\ell+1)^2}{1+\ell^2+\ell+1+(\ell^2+\ell+1)^2}=\ell$

donc $(\ell^3+\ell^2+\ell)^2=\ell^3\left(1+\ell^2+\ell+1+(\ell^2+\ell+1)^2\right)$

$=\ell^3+\ell^2(\ell^3+\ell^2+\ell)+\ell(\ell^3+\ell^2+\ell)^2$

donc $(\ell^3+\ell^2+\ell)(\ell^3+\ell^2+\ell-\ell^2-\ell^4-\ell^3-\ell^2)=\ell^3$

$(\ell^3+\ell^2+\ell)(\ell-\ell^4)=\ell^3$

$-(\ell^3+\ell^2+\ell)(\ell^3-1)=\ell^2$

$(\ell^3-1)(\ell^3+\ell^2+\ell)+\ell^2=0$

4.e) on conclut que $\ell^3+\ell^2+\ell-1=0$

donc $g(\ell)=\ell$ d'où $\ell=\beta$

et $\ell'=g(\ell)=g(\beta)=\beta$

donc v_{2n} et v_{2n+1} cvge vers β

donc v_n aussi car $v_n=(v_{2n})\cup(v_{2n+1})$