DL Bis : *Fonctions réelles.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = e^{a(x-1)}$.

On définit alors une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation $u_{k+1} = f(u_k)$.

1) Convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

a) Établir par récurrence pour tout nombre entier naturel k les inégalités : $0 \le u_k \le 1$ et $u_k \le u_{k+1}$.

b) En déduire la convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dont on notera $L(a)$ la limite.

2) Limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $a < 1$.

a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que :
$0 \le 1 - u_{k+1} \le a(1 - u_k)$.

b) En déduire l'inégalité $0 \le 1 - u_k \le a^k$ pour tout nombre entier naturel k, puis la limite $L(a)$ de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $0 < a < 1$.

3) Limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $a \ge 1$.

a) On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \ge 1$.

i. Prouver que $0 \le 1 - \dfrac{\ln(a)}{a} \le 1$ pour $a \ge 1$.

ii. Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a.

iii. En déduire la variation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$.
Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.
On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$.
On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

b) On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \ge 1$.

i. Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto xe^{-x}$.
Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.

ii. En déduire que la fonction θ, définie pour $0 \le x \le 1$ par $\theta(x) = xe^{-x}$, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ et montrer que la fonction θ^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ *(on citera le théorème utilisé).*
Dresser le tableau de variation de θ^{-1}.

iii. Prouver que $r(a) = \dfrac{1}{a}\theta^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ en $+\infty$.

c) On étudie maintenant la limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $a \ge 1$.

i. Établir l'inégalité $0 \le u_k \le r(a)$ pour tout nombre entier naturel k.

ii. En déduire la limite $L(a)$ de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $a \ge 1$.

4) Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Fin.