.

.

.

Partie III : La fonction de Bessel.

1) Comme on peut intégrer à l'intérieur de l'intégrale $J'(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos t \sin(x\cos t)\mathrm{d}t$ et $J``(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 t \cos(x\cos t)\mathrm{d}t$.

2) En effectuant une intégration par parties dans $J'(x)$ avec $u' = \cos t, v = \sin(x\cos t)$, on trouve que $J'(x) = -\dfrac{1}{\pi}\left(\underbrace{[\sin t \sin(x\cos t)]_0^{\pi}}_{\text{nul}} + \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 t \cos(x\cos t)\mathrm{d}t\right)$. Ainsi $xJ``(x) + J'(x) + xJ(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(-\cos^2 t - \sin^2 t + 1)\cos(x\cos t)\mathrm{d}t = 0$.

3) Pour tout réel $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

a) $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t$, en effectuant le changement de variable $u = \pi - t$ dans la deuxième intégrale.

b) En posant $u = \tan t$, donc $\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + u^2$ et $dt = (1+u^2)du$, on trouve $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^2u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\left[\arctan\left(\frac{xu}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_{u=0}^{u\longrightarrow+\infty} = \frac{\pi}{2x\sqrt{1+x^2}}$, donc $I(x) = \dfrac{\pi}{x\sqrt{1+x^2}}$.

4) La transformée de Laplace de la fonction de Bessel J est

$$L(J)(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\cos u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\underbrace{\int_0^{+\infty}\cos(t\cos u)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t}_{L(t\mapsto\cos(t\cos u))}\right)du = \frac{1}{\pi} = \int_0^{\pi}\frac{1}{x^2+\cos^2 u}\mathrm{d}u = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Partie IV : Transformée de Laplace de la fonction logarithmique.

1) Au voisinage de 0 : $\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\ln t \underset{t\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ (les puissances l'emportent au voisinage de 0), donc intégrable.
Au voisinage de $+\infty$: $t^2\mathrm{e}^{-t}\ln t \underset{t\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ (les exponentielles l'emportent au voisinage de $+\infty$), donc intégrable.

2) Pour tout réel $x > 0$ et entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\begin{cases} U_n(x) = & (1-\frac{x}{n})^n \ln x & \text{si } x \in]0,n] \\ \quad\quad\;\; = & 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$.

a) Pour $x > 0$ fixé, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \sim -x$, donc $\displaystyle\lim_{+\infty} U_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln x$

b) $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq -x$, donc $0 \leq |U_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}|\ln x|$, ainsi U_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ car la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\ln x$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

3) On a $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} U_n(t)\mathrm{d}t$, existe car U_n est integrable sur $]0,+\infty[$, d'autre part $\lim\limits_{+\infty} U_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\ln t$, et puisque on peut permuter les signes limite et intégrale, alors $\lim\limits_{+\infty} J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t$.

4) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto t^p \ln(nt)$ sur $]0,1]$ puisque prolongeable par continuité en 0. Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{t^p}_{u'} \underbrace{\ln(nt)}_{v} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\ln(nt)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^p}{p+1}\mathrm{d}t = \frac{\ln n}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$.

5) En posant le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$, on obtient $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\mathrm{d}t =$
$n\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n \ln u\mathrm{d}u = n\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathcal{C}_p^n \int_0^1 u^p \ln(nu)\mathrm{d}u = n\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathcal{C}_p^n\frac{\ln n}{p+1} - n\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathcal{C}_p^n\frac{1}{(p+1)^2} =$
$\dfrac{n\ln n}{n+1}\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathcal{C}_{p+1}^{n+1} - \frac{n}{n+1}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathcal{C}_{p+1}^{n+1}\frac{1}{p+1} = -\frac{n\ln n}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^p\mathcal{C}_p^{n+1} + \frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1}\frac{(-1)^p\mathcal{C}_p^{n+1}}{p} =$
$-\dfrac{n\ln n}{n+1}((1-1)^{n+1}-1) + \displaystyle\frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p} = \frac{n}{n+1}\left(\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p} - \ln n\right) = \frac{n}{n+1}\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)$.

6) D'aprés ce qui précède, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} J_n = \lim_{+\infty} \frac{n}{n+1}u_n + \frac{n}{(n+1)^2} = \gamma$.

7) On a déjà vu qua la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-xt}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc la transformée de Laplace de la fonction logarithme est bien définie pour tout $x>0$, avec $L(\ln)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ln t\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\ln\frac{u}{x}\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{x}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\ln u\mathrm{d}u - \ln x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right) =$
$\underline{\dfrac{\gamma - \ln x}{x}}$