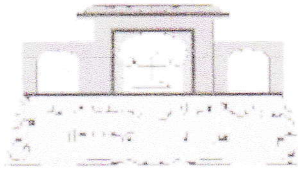
CPGE My Youssef, Rabat



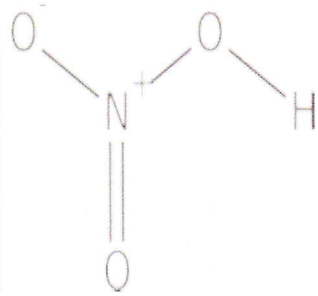
بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إعمَلوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

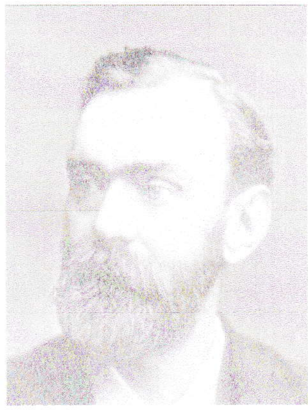
DS Blanc: *Géomètrie euclidienne du plan et de l'espace*

27 janvier 2009

Blague du jour :
Le professeur de chimie inscrit la formule $HN0_3$ sur le tableau. Il interroge ensuite un élève :
- Que signifie cette formule ?
- Heu ...., désolé monsieur je l'ai oublie ; mais je l'ai sur le bout de la langue, monsieur !
- Crachez-la tout de suite, c'est de l'acide nitrique !



Personnalité du jour — *Nobel*
Alfred Bernhard Nobel, (1833-1896) est un chimiste, industriel et fabricant d'armes suédois. Inventeur de la dynamite, l'élément chimique nobélium fut nommé ainsi en son honneur.
Après sa mort, Nobel laisse 80 entreprises, réparties dans une vingtaine de pays. Il légua son immense fortune (4 millions de dollars) en vue de la création du Prix Nobel pour récompenser chaque année les personnes qui ont rendu à l'Humanité de grands services dans cinq domaines différents (paix, littérature, chimie, médecine et physique). Différente versions ont été donné au sujet du refus de Nobel d'honorer les mathématiques ; on retient surtout celle qui dit qu'il en avait horreur ou qu'il ne trouvait pas cela intéressant.



On se place dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Un trièdre est la figure formée par trois demi-droites non coplanaires de même origine.
On considère un trièdre formé de trois demi-droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3, d'origine commune A, et dirigées respectivement par des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ que l'on supposera unitaires. On suppose de plus la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ directe. On note P_1, P_2 et P_3 les plans contenant respectivement les droites Δ_2 et Δ_3, Δ_1 et Δ_3, Δ_1 et Δ_2. Ces trois plans sont appelés les faces du trièdre.
On suppose connus les mesures des angles entre les trois demi-droites, et on se propose d'étudier les angles entre les trois faces du trièdre.
On appelle mesure de l'angle entre deux faces la mesure, à π près, de l'angle entre des vecteurs normaux à ces deux faces.
On pose $\alpha_1 = \widehat{(\vec{u}_2, \vec{u}_3)}$, $\alpha_2 = \widehat{(\vec{u}_3, \vec{u}_1)}$ et $\alpha_3 = \widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}$, sachant que l'on choisit ces mesures d'angles entre 0 et π.

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

1. Donner l'expression de $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$, vecteurs normaux respectifs de P_2 et P_3, à l'aide des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. On les choisira de telle sorte que $\vec{n}_2$ soit dirigé vers l'intérieur du trièdre et que $\vec{n}_3$ soit dirigé vers l'extérieur du trièdre. Donner la norme de ces vecteurs.

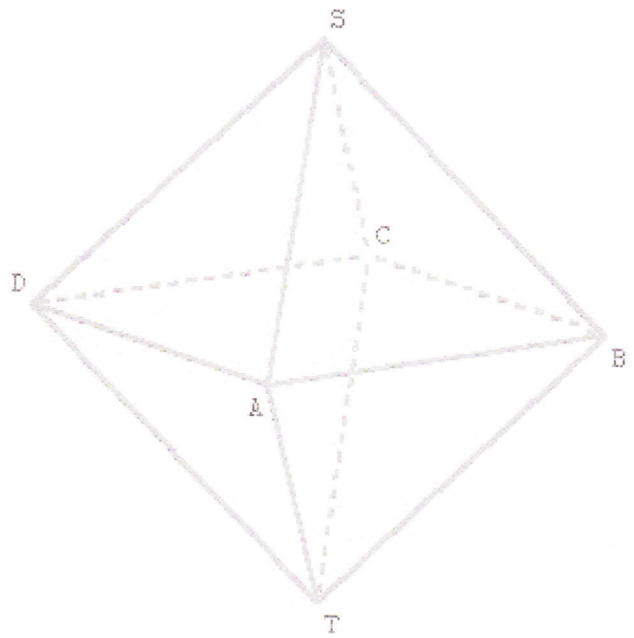
2. Rappeler la définition du déterminant (produit mixte) de trois vecteurs à l'aide d'un produit scalaire et d'un produit vectoriel. En déduire[1] que, de façon générale, on a :
$(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}.\vec{c}) & (\vec{a}.\vec{d}) \\ (\vec{b}.\vec{c}) & (\vec{b}.\vec{d}) \end{vmatrix}$ (i.e) $(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c}) \times (\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{b}.\vec{c}) \times (\vec{a}.\vec{d})$.

3. On note $a_1 = \widehat{(\vec{n}_2, \vec{n}_3)}$, mesure que l'on peut choisir entre 0 et π. Le réel a_1 est donc une mesure de l'angle entre les faces P_2 et P_3. A l'aide des résultats précédents, démontrer la formule :

$$\cos(a_1) = \frac{\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_2)\sin(\alpha_3)}$$

4. <u>1ère application</u> : on considère dans cette question un tétraèdre $ABCD$ supposé régulier, c'est-à-dire que chaque face est un triangle équilatéral. Déterminer la mesure $\theta \in [0, \pi]$ de l'angle entre deux faces quelconques de ce tétraèdre. On ne demande pas la valeur exacte de θ, mais son expression à l'aide de la fonction arccos. Donner éventuellement un encadrement le plus précis possible de θ à l'aide d'angles «simples», et une valeur approchée exprimée en degré, à l'aide d'une calculatrice.

5. <u>2ème application</u> : on considère dans cette question un octaèdre (*diamant ?*) $SABCDT$, de «base» carrée $ABCD$ et tel que SAB, SBC, SCD, SDA, TAB, TBC, TCD, TDA, soient des triangles équilatéraux (voir schéma). Soit $\sigma \in [0, \pi]$ la mesure de l'angle entre les faces SAB et SBC, et soit $\omega \in [0, \pi]$ celle de l'angle entre les faces SAB et TAB. Vérifier que $\sigma = \omega$.



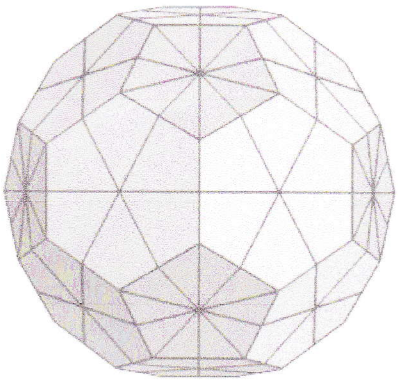
mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

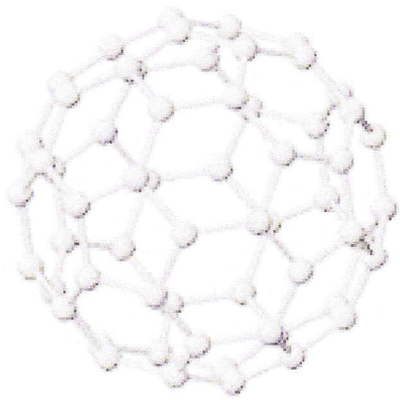
6. <u>3ème application</u> : on suppose dans cette question que le trièdre est formé de trois demi-droites telles que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.

   (a) Déterminer l'expression de $\beta \in [0, \pi]$, mesure de l'angle entre deux faces de ce trièdre, en fonction de α.

   (b) On définit la fonction f par $f(x) = \arccos\left(\dfrac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)$.
   A quelle condition $f(x)$ existe-t-il ? A l'aide de la périodicité et de la parité de f, réduire son domaine de définition à un intervalle d'étude I que l'on précisera. Déterminer le sens de variation de f sur I. Chercher la limite de f aux bords de I. Ces différents résultats vous paraissent-ils corrects ou plutôt surprenants ?

7. <u>4ème application</u> : on considère enfin dans cette question un ballon de football [2] qui, contrairement à ce que l'on croit, n'est pas une sphère, mais une surface constituée de pentagones et d'hexagones réguliers ! Plus précisément, chaque pentagone est en contact avec cinq hexagones, et chaque hexagone est en contact avec trois pentagones et trois autres hexagones (en alternance). Chaque sommet de cette surface est commun à deux hexagones et un pentagone.
   Calculer[3] la mesure $\theta_1 \in [0, \pi]$ de l'angle entre les deux plans contenant deux hexagones, puis la mesure $\theta_2 \in [0, \pi]$ de l'angle entre deux plans contenant chacun un hexagone et un pentagone : donner leurs valeurs exactes, puis approchées en degré.





   Facultatif : pour tirer un pénalty, vaut-il mieux poser le ballon sur un pentagone ou un hexagone ?

[2] Coin des chimistes : cette structure se retrouve dans une molécule, appelée footballène, de la famille des fullerènes (hommage à l'architecte Buckminster Fuller qui avait eu l'idée de donner cette forme au Dôme de Montréal), composée de 60 atomes de carbone (C_{60}) situés sur les sommets du polyèdre (icosaèdre tronqué : faces formées de 12 pentagones et 20 hexagones). Il s'agit d'une molécule de haute symétrie qui possède des propriétés spécifiques (magnétiques, électriques,...) et qui permet de fabriquer des matériaux extrêmement durs. Elle est, en outre, un bon additif anti-friction et anti-usure pour les huiles de moteur.

[3] On admettra que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Fin
à la prochaine