بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Contrôle (07-08) : *Calcul matriciel*

Vendredi 14 Mars 2008.

Durée : 2heures

EXERCICE.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.

a) On suppose que A est inversible.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, associé à A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on pose $F_k = Vect(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

i. Montrer que $f(F_k) = F_k$.

ii. En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.

iii. En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.

iv. En déduire que $com(A)$ est triangulaire inférieure.

b) On suppose que A est non inversible.
Soit $\alpha = \min\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \text{ valeur propre non nulle de } A\}$

i. Montrer que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, est inversible.

ii. En déduire que $com(A)$ est triangulaire inférieure.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$\text{rg}(\text{com}(A)) = n$ si $\text{rg}(A) = n$
$\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$ si $\text{rg}(A) = n-1$
$\text{rg}(\text{com}(A)) = 0$ si $\text{rg}(A) \leq n-2$

3) Calculer $\text{com}\,(\text{com}\,A)$ dans le cas où A est inversible.

4) Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $\text{com}\,(I_n)$ et $\text{com}\,(\lambda A)$.

b) Si A et B sont inversibles, démontrer que : $\text{com}\,(AB) = (\text{com}\,A)(\text{com}\,B)$ et $\text{com}\,(A^{-1}) = \text{com}\,(A)^{-1}$.

c) Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ tels que $A - \varepsilon I$ et $B - \varepsilon I$ soient inversibles.

d) En déduire que si A et B sont semblables, alors $\text{com}\,A$ et $\text{com}\,B$ le sont.

.

.

$\boxed{\mathcal{F}in}$