DS 5 : Polynômes

Durée : 3 heures

Notations :
L 'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve
La partie A est admise.
Le sujet est tiré de l'épreuve 1997, de concours Banque Agro, prépas biologie et traite les polynômes appelés de **Bernouilli**.
E désignera l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales. (qu'on appellera aussi simplement polynômes) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si n est un entier naturel, on notera :

- E_n, le sous-espace de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $f^{(n)}$ la dérivée n-ième d'une fonction numérique réelle f.
- X^n la fonction qui à tout x réel associe x^n.

On désignera par Δ l'application qui à tout élément P de E associe $\Delta(P)$, défini, pour tout x réel par :

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

0.1. PARTIE A :Etude d'un endomorphisme.

A.l. Montrer que Δ est un endomorphisme de E et que, pour tout n entier naturel, sa . restriction à E, définit un endomorphisme Δ_n, de E_n,.
A.2. Dans cette question on suppose : $n = 3$. Ecrire la matrice de Δ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer son image et son noyau.
A.3. n désigne dans cette question un entier naturel non nul.
A.3.a. Justifier les relations : $\Delta_n(E_n) = E_{n-1}$ et $\ker(\Delta_n) = E_0$.
A.3.b. En déduire que, pour tout polynôme Q de E_{n-1}, il existe un unique polynôme P vérifiant les relations :

$$\begin{array}{l} \Delta_n(P) = Q \\ \int_0^1 P(x)dx = 0 \end{array}$$

0.2. PARTIE B : Etude d'une famille de polynômes.

Dans toute la suite du problème, on posera : $B_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel non nul, on désignera par B_n, l'unique polynôme vérifiant :

$$\begin{array}{l} \Delta_n(B_n) = nX^{n-1} \\ \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \end{array}$$

B.l. (0.75 pts) Calculer B_1 et B_2.
B.2. (1 pt) Déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de B_n.
B.3.a. (0.5 pts) Montrer que pour $n \geq 2$, on a : $B_n(0) = B_n(1)$.
B.3.b. (1.5 pts) tablir que pour n non nul, la dérivée notée $B_n^{(1)}$ de la fonction polynômiale B_n, vérifie la relation :

$$B_n^{(1)} = nB_{n-1}$$

<u>Indication</u> : on pourra, par exemple, calculer $\Delta(B_n^{(1)} - nB_{n-1})$.

B.3.c. (1.5 pts) On pose, pour tout x réel : $S_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$. Après avoir calculé, pour tout x réel, $\Delta(S_n)(x)$ en fonction de $\Delta(B_n)(-x)$, justifier l'égalité :

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

En déduire que, pour tout k entier naturel non nul, B_{2k+1} s'annule en 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
B.3.d. (2 pts) En s'inspirant de la méthode utilisée en B.3.c., justifier, pour n non nul et x réel :

$$B_n(x) = 2^{n-1}\left(B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{x+1}{2})\right)$$

En déduire pour k entier naturel non nul :

$$B_{2k}(\frac{1}{2}) = (-1 + 2^{1-2k})B_{2k}(0)$$

B.4.a. (1.5 pts) Montrer que B_3 n'a pas d'autres racines que 0, $\frac{1}{2}$ et 1, en déduire qu'il ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$; montrer ensuite, sans calculer B_4 et B_5 et à partir des tableaux de variations de B_2 et B_3, que B_4 s'annule une et une seule fois sur $]0, \frac{1}{2}[$ et que B_5 ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
B.4.b. (2.5 pts) Plus généralement, montrer par récurrence que, pour tout entier k non nul, B_{2k} s'annule une et une seule fois sur $]0, \frac{1}{2}[$ et que B_{2k+1} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
B.4.c. (1.5 pts) En déduire en particulier que, pour k non nul, $|B_{2k}|$ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en 0.

0.3. PARTIE C : Application au calcul approché d'une intégrale.

Dans toute cette partie f désigne une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[O, l]$, avec n un entier naturel non nul.
C.1. (1.5 pts) En intégrant deux fois par parties, justifier la relation :

$$\int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x)dx = B_2(0)[f^{(1)}(1) - f^{(1)}(0)] - (f(0) + f(1)) + 2\int_0^1 f(x)dx$$

C.2. (1.5 pts) Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] + R_n$$

où : $R_n = \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x)B_{2n}(x)dx$.
<u>Indication</u> : *On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en exprimant R_n en fonction de R_{n+1} après avoir effectué deux intégrations par parties successives.*
C.3. (0.5 pts) Justifier l'inégalité :

$$|R_n| \leq M\frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}$$

où M désigne la borne supérieure de $f^{(2n)}$ sur $[0, 1]$.

FIN DE L'ENONCÉ.