DL 3 : *Structures*

A rendre Lundi 29 Novembre 2004

Problème 1:

Sous groupe engendré par une partie : Soit $(G, .)$ un groupe et A une partie de G, on appelle sous-groupe de G engendré par A, le plus petit sous-groupe de G qui contient A, on le note $< A >$.

1. Donner $< \emptyset >$.
2. Soit H un sous groupe de G, tel que $A \subset H$ montrer que : $< A > \subset H$.
3. En déduire que : $< A > = \{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ tel que: $n \in \mathbb{N}^*, a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$.
4. En déduire $< \{a\} >$ où $a \in G$.
5. Donner la forme générale des éléments de $< \{a, b\} >$ où $(a, b) \in G^2$.
6. Soit $(a, b) \in G^2$ tel que: $a^3 = b^2 = (ab)^2 = e$.
   (a) Simplifier les expressions aba, bab, a^2b, ba^2.
   (b) En déduire la forme générale des éléments de $< \{a, b\} >$.
7. Soit $(a, b) \in G^2$ tel que: $aba = b$.
   (a) Montrer que : $ab = ba^{-1}, ba = a^{-1}b$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad a^n b = ba^{-n}$.
   (c) En déduire que : $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \qquad a^n b^m = b^m a^{(-1)^m n}$.
   (d) En déduire que : $< \{a, b\} > = \{a^n b^m \quad$ tel que: $(n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.
8. Soit $r : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & jz \end{array}$; $\qquad s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$.
   (a) Montrer que : $rosor = s$.
   (b) Donner tous les éléments de $< \{r, s\} >$ puis le cardinal de $< \{r, s\} >$.
   (c) Donner l'intépretation géometrique de chaque élémén't de $< \{r, s\} >$.

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca