DS 2 : *Suites réelles*

Mardi 09 Novembre 2004

CORRIGÉ

Problème 1:

Partie I : *Proportion des applications à zéro ou un seul point fixe.*

1. On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} &= a_{n,0} + a_{n,1} + \ldots + a_{n,n} \\ &= \text{Nombre total d'applications de } [|1,n|] \text{ vers } [|1,n|] \text{ à 0 points fixes} \\ &+ \text{Nombre total d'applications de } [|1,n|] \text{ vers } [|1,n|] \text{ à 1 points fixes} \\ &\vdots \\ &+ \text{Nombre total d'applications de } [|1,n|] \text{ vers } [|1,n|] \text{ à n points fixes} \\ &= \text{ Nombre total d'applications de } [|1,n|] \text{ vers } [|1,n|] \\ &= n^n\end{aligned}$$

2. $f(i)$ peut prendre toutes les valeurs dans $[|1,n|]$ sauf i puisque $f(i) \neq i$, donc $n-1$ choix pour $f(i)$ si i n'est pas fixe, comme on a $n-k$ points qui ne sont pas fixes d'où $(n-1)^{n-k}$ choix et on a $\mathcal{C}_n^k$ choix pour k points fixes parmi n et un seul choix pour chaque image, d'où le nombre total est bien : $a_{n,k} = \mathcal{C}_n^k (n-1)^{n-k}$.

3. $$\begin{array}{lll} \dfrac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = \dfrac{\mathcal{C}_n^{k+1}(n-1)^{n-k-1}}{\mathcal{C}_n^k (n-1)^{n-k}} & = \dfrac{n!k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!n!} \times \dfrac{1}{n-1} & \\ = \dfrac{n-k}{(k+1)(n-1)} & \text{car } \dfrac{p!}{(p-1)!} = p+1. & \\ < 1 & \text{car } (k+1)(n-k) = n-k+k(n-k) > n-k. & \end{array}$$

4. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k x^k y^{n-k}$, aprés dérivation on obtient : $n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\mathcal{C}_n^k x^{k-1} y^{n-k}$. En prenant $x=1, y=n-1$ on trouve que : $\sum_{k=0}^{n} k a_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k\mathcal{C}_n^k (n-1)^{n-k} = n(1+n-1)^{n-1} = n^n$.
On dérive cette fois deux fois pour trouver que :
$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathcal{C}_n^k (n-1)^{n-k} = n(n-1)(1+n-1)^{n-2} = (n-1)n^{n-1}$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-1)^2 a_{n,k} = \sum_{k=0}^{n}(k-1)(k-1)a_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_{n,k} - \sum_{k=0}^{n} k a_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \\ &= (n-1)n^{n-1} - n^n + n^n = (n-1)n^{n-1}\end{aligned}$$

5. (a) u_n et v_n représentent respectivement la proportion des applications à zéro points fixes et celles à un seul point fixe parmi toutes les applications.

(b) On pose $g(x)=(1+x)^n-1-nx, g'(x)=n((1+x)^{n-1}-1)$. D'où le tableau des variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	$\searrow$	0	$\nearrow$

(c) Posons $x_n=(1+\frac{x}{n})^n$. $\ln x_n = n\ln(1+\frac{x}{n}) = x\frac{\ln(1+u)}{u} \to x$ car $u=\frac{x}{n}\to 0$.

(d) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a_{n+1,0}}{a_{n,0}} \times \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n^{n+1}}{(n-1)^n} \times \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} = \dfrac{n}{n+1} \times \left(\dfrac{n^2}{(n^2-1}\right)^n = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n} > \dfrac{n}{n+1}\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right) = 1$. D'où (u_n) est croissante.

De même $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{a_{n+1,1}}{a_{n,1}} \times \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{(n+1)n^n}{n(n-1)^{n-1}} \times \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n} < \dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{1}{1-\frac{n}{n^2}} = 1$. D'où (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) \to e^{-1}\times 0 = 0$. D'où (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(e) $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$, donc $v_n \to e^{-1}$ aussi.

(f) u_n désigne la proportion des applications à zéro points fixes, et v_n celle des points à un point fixe, à l'infini ces proportions valent $e^{-1}=38/100$, donc $72/100$ des applications ont au moins un point fixe.

(g) Comme les deux suites (u_n) et (v_n) ont adjacentes donc la limite comuune L est encadrée par les deux suites $u_n \leq L \leq v_n$, d'où $|u_n - L| \leq |u_n - v_n| = \dfrac{(n-1)^n}{n^n} \leq 10^{-1}$ si $n=2$ par exemple.

Problème 2:

Partie 1 : *Convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $u_n>0$, par récurrence simple. D'autre part $u_{n+1}-u_n=u_n^2>0$, donc (u_n) croissante.
2. Supposons que la suite (u_n) ne diverge vers pas vers l'infini, donc elle aurait une limite finie, L, puisqu'elle est croissante, or $u_{n+1}=u_n+u_n^2$, d'où $L=L+L^2$, d'où $L=0$, d'autre part (u_n) est croissante donc $0=L\geq u_0>0$, absurde, d'où (u_n) diverge vers l'infini.

Partie 2 : *Comportement asymptotique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln u_{n+1} - \frac{1}{2^n}\ln u_n = \frac{1}{2^{n+1}}(\ln u_{n+1} - 2\ln u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\ln u_{n+1} - \ln u_n^2\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.

   D'aprés ce qui précède on a : $v_{n+p+1}-v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+p}}\right) > 0$ et $v_{n+p+1}-v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+p}}\right) \leq \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$, car (u_n) est croissante donc $u_{n+p+1}\geq u_n$ et par suite $\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+p}}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.
2. En sommant les inégalités de la question précédente pour $0\leq p\leq k$, on obtient :

   $0=\displaystyle\sum_{p=0}^{k} 0 < \sum_{p=0}^{k} v_{n+p+1}-v_{n+p} = v_{n+k+1}-v_n \leq \sum_{p=0}^{k}\frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{2^p} = \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.

3. D'aprés la question précédente on a : $\forall k \in \mathbb{N} \quad v_{k+1} - v_0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)$, d'où v_{k+1}, et par suite v_n est majorée par $v_0 + \ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)$, et puisqu'elle est croissante donc converge vers une limite notée α .

4. (v_n) est croissante donc inférieure à sa limite α, d'où $\forall n \in \ N, v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n \leq \alpha$, d'où $u_n \leq \alpha\exp(\alpha 2^n)$.

   En passant à la limite sur k pour n fixé dans l'encadrement de la question 2 Partie 2, on obtient $\alpha - v_n = \alpha - \frac{1}{2^n}\ln u_n \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{1+u_n}{u_n}\right) = \frac{1}{2^n}\ln(1+u_n) - \frac{1}{2^n}\ln u_n$, d'où $\alpha 2^n \leq \ln(1+u_n)$,d'où $\forall n \in \ N, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$.

   Ainsi on obtient $u_n \leq \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$, d'où $1 \leq \dfrac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$ et conclut à l'aide du théorème d'encadrement que : $\lim \dfrac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} = 1$, parceque $\lim u_n = +\infty$. D'où $u_n \sim \exp(\alpha 2^n)$.

5. On a : $u_n \leq \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$, d'où $0 \leq \beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n \leq 1$. D'où $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, en plus $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) = (\exp(\alpha 2^{n+1}) - u_{n+1} + (\exp(\alpha 2^n) - u_n)^2 - \exp(\alpha 2^n) + u_n)\exp(-\alpha 2^n) = (\exp(\alpha 2^{n+1}) - u_n - u_n^2 + \exp(\alpha 2^{n+1}) - 2u_n\exp(\alpha 2^n) + u_n^2 - \exp(\alpha 2^n) + u_n)\exp(-\alpha 2^n) = (2\exp(\alpha 2^{n+1}) - 2u_n\exp(\alpha 2^n) - \exp(\alpha 2^n))\exp(-\alpha 2^n) = 2\exp(\alpha 2^n) - u_n - 1 = 2\beta_n - 1$.

6. Montrons d'abord que : $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) \to 0$, en effet : $u_n \sim \exp(\alpha 2^n)$, d'où $\exp(\alpha 2^n) - u_n = o(\exp(\alpha 2^n))$, c'est à dire que : $\dfrac{\exp(\alpha 2^n) - u_n}{\exp(\alpha 2^n)} = \beta_n\exp(-\alpha 2^n) \to 0$, or

   $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) = \beta_{n+1}\exp(-\alpha 2^n) + \beta_n^2\exp(-\alpha 2^n) - \beta_n\exp(-\alpha 2^n)$

   $= \beta_{n+1}\exp(-\alpha 2^{n+1})\exp(-\alpha)2^{n+1}) + \beta_n\beta_n\exp(-\alpha 2^n) - \beta_n\exp(-\alpha 2^n) \to 0$

   car $\beta_{n+1}\exp(-\alpha 2^{n+1}) \to 0, \exp(-\alpha)2^{n+1}) \leq 1$, puisque $\alpha = \lim v_n \geq 0$ et parceque

   $\beta_n\exp(-\alpha 2^n) \to 0$ et β_n bornée. D'où $2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) \to 0$, donc $-2\beta_n + 1 \to 0$, donc $-2\beta_n + 1 = 2u_n - 2\exp(\alpha 2^n) + 1 = o(1)$ et alors

   $u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(\frac{1}{2})$.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca